

UMA PROPOSTA PARA ENSINAR RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

A PROPOSAL FOR TEACHING METRIC RELATIONS IN RIGHT TRIANGLES

UNA PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS RELACIONES MÉTRICAS EN TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Walter Jesus da Costa Martins Filho

Mestre, atua na (SEDUC), Belém, PA, Brasil

<http://orcid.org/0000-0002-7108-1085>.

walterjcmf@mail.com

Fernando Roberto Braga Colares

Mestre, atua como professor adjunto na UNAMA, Belém, PA, Brasil

<https://orcid.org/0000-0002-7125-9330>

fismat.fernando@gmail.com

Gustavo Nogueira Dias

Doutor, atua como professor adjunto na UEPA, Belém, PA, Brasil

Orcid: <https://orcid.org/0000-0003-1315-9443>

gustavo.dias@uepa.br

Cássio Pinho dos Reis

Doutor, atua como professor adjunto da UFMS, Campo Grande, MS, Brasil

<https://orcid.org/0000-0002-2211-2295>

cassio.reis@ufms.br

Gilberto Emanuel Reis Vogado

Doutor, atua como professor adjunto na UEPA, Belém, PA, Brasil

<https://orcid.org/0000-0003-4763-4767>

gilberto.vogado@uepa.br

Saul Rodrigo da Costa Barreto

Doutor, atua como professor adjunto na UEPA, Belém, PA, Brasil

<https://orcid.org/0000-0002-2398-743X>

saul.rdc.barreto@uepa.br

Alessandra Epifânio Rodrigues

Doutora, atua como professora associada na UFRA, Belém, PA Brasil

<https://orcid.org/0000-0002-8375-2923>

alessandra.epifanio@ufra.edu.br

Vanessa Mayara Souza Pamplona

Doutora, atua como professora associada na UFRA, Belém, PA Brasil

<https://orcid.org/0000-0002-2461-2103>

vanessamayara2@gmail.com

Fernando Ramos de Farias

Mestre, atua no CTRB, Belém, PA, Brasil

<https://orcid.org/0000-0001-8357-9684>

fernandorf.math@gmail.com

Resumo

Este trabalho tem como objetivo apresentar uma forma de ensinar o conteúdo de geometria relações métricas no triângulo retângulo usando como recurso a malha quadriculada. As referências bibliográficas usadas foram Silva & Barbosa (2022) que apontou as causas para a dificuldade nesse conteúdo, Carvalho (2004) que apontou dificuldades e ressaltou a importância desse conteúdo, Lamas & Mauri (2006) que usaram materiais emborrachados para ensinar esse conteúdo, Santos & Mendonça (2016) que usam da robótica como metodologia para esse conteúdo e Pires (2018) que usa o software geogebra para ensinar esse conteúdo. A metodologia usada para produzir esse texto foi a pesquisa qualitativa baseada no trabalho de outros autores e a experiência que trazemos conosco em ensinar matemática como professores. Como resultado apresentamos uma forma de se ensinar e discutir o aprendizado de relações métricas no triângulo retângulo recorrendo ao recurso da malha quadriculada sem usar a semelhança de triângulos para deduzir fórmulas.

Palavras-chave: Ensino-aprendizagem. Ensino de matemática. Geometria. Relações métricas no triângulo retângulo.

Abstract

This work aims to present a way to teach the geometry content of metric relations in right triangles using a grid as a resource. The bibliographic references used were Silva & Barbosa (2022), who pointed out the causes of difficulty in this content; Carvalho (2004), who pointed out difficulties and highlighted the importance of this content; Lamas & Mauri (2006), who used rubberized materials to teach this content; Santos & Mendonça (2016), who use robotics as a methodology for this content; and Pires (2018), who uses the GeoGebra software to teach this content. The methodology used to produce this text was qualitative research based on the work of other authors and our experience in teaching mathematics as teachers. As a result, we present a way to teach and discuss the learning of metric relations in right triangles using a grid without using triangle similarity to deduce formulas.

Keywords: Teaching and learning. Mathematics education. Geometry. Metric relations in right triangles.

Resumen

Este trabajo tiene como objetivo presentar una manera de enseñar el contenido geométrico de las

relaciones métricas en triángulos rectángulos utilizando una cuadrícula como recurso. Las referencias bibliográficas utilizadas fueron Silva y Barbosa (2022), quienes señalaron las causas de la dificultad en este contenido; Carvalho (2004), quien señaló las dificultades y destacó la importancia de este contenido; Lamas y Mauri (2006), quienes utilizaron materiales engomados para enseñar este contenido; Santos y Mendonça (2016), quienes utilizan la robótica como metodología para este contenido; y Pires (2018), quien utiliza el software GeoGebra para enseñar este contenido. La metodología utilizada para producir este texto fue una investigación cualitativa basada en el trabajo de otros autores y nuestra experiencia en la enseñanza de las matemáticas como docentes. Como resultado, presentamos una manera de enseñar y discutir el aprendizaje de las relaciones métricas en triángulos rectángulos utilizando una cuadrícula sin utilizar la semejanza de triángulos para deducir fórmulas.

Palabras clave: Enseñanza y aprendizaje. Educación matemática. Geometría. Relaciones métricas en triángulos rectángulos.

1.Considerações Iniciais

A informação e acesso extremamente fácil a tecnologia colocou certos conceitos educacionais antigos em total desuso. É praticamente impossível fiscalizar provas da escola. Há milhares de formas usadas pelos alunos para driblar a fiscalização contra colas e ou celulares, por mais rígida que sejam eles sempre encontram uma maneira. Na escola em que trabalho a maneira encontrada é a mais trabalhosa, fazer tipos diferentes de provas e intercalar várias turmas em uma mesma sala de aplicação. Funciona, mas nem sempre. Com essas alterações percebemos que a educação brasileira sofreu inúmeras mudanças nos últimos 20 anos. Existe uma escola dos meus pais e outra totalmente diferente a dos meus filhos (DIAS, G. N. et al 2024).

Nas últimas duas décadas, estudos de pesquisa em educação matemática têm explorado o uso de atividades de padronização como forma de introduzir o pensamento algébrico inicial, com foco particular em padrões geométricos e sequências figurativas por exemplo: Carraher, Schliemann & Schwarz (2008); Moss e Beatty, (2010); Radford, (2010); Rivera, (2011). Esses estudos mostram que os alunos tendem a usar estratégias recursivas para descrever generalizações, em vez da relação funcional direta entre as variáveis envolvidas (JONES, et al 2020).

Arcavi, (2003), relata que os matemáticos têm consciência do valor dos diagramas e de outras ferramentas visuais tanto para o ensino quanto como heurísticas para a descoberta matemática. Mas, apesar da óbvia importância das imagens visuais nas atividades cognitivas humanas, a representação visual continua sendo relegada a um segundo plano tanto na teoria quanto na prática da matemática. Em particular, somos ensinados a olhar com desdém para demonstrações que fazem uso crucial de diagramas, gráficos ou outras formas não linguísticas de representação, e transmitimos esse desdém aos alunos.” No entanto, “formas visuais de representação podem ser importantes como elementos legítimos de demonstrações matemáticas.

Para Stylianides (2010), o raciocínio matemático é um processo de inferência que utiliza informação matemática já conhecida para obter novo conhecimento ou novas conclusões. De forma similar, Mata-Pereira e Ponte (2018, p. 728) definem-no como o “processo que utiliza informação já conhecida para obter, justificadamente, novas conclusões”. Na mesma direção, Moraes et al. (2018) destacam que o raciocínio matemático é obtido por meio de um conjunto de ideias já conhecida e, partir dessas ideias, criam-se conceitos complexos para obter assim um novo conhecimento.

O ensino de conteúdo de geometria relações métricas no triângulo retângulo, geralmente, é ensinado após o estudo da semelhança de triângulos, de uma forma que a semelhança de triângulos é usada para se deduzir seis fórmulas que constituem as relações métricas. O processo da dedução das seis fórmulas é tido como complicado e de difícil entendimento, tanto para professores como para alunos.

Presume-se que tenha sido Hiparco quem de fato estabeleceu, por volta de século II a.C., as bases da trigonometria. Mas os hindus e os árabes também contribuíram para seu desenvolvimento. Contudo, foi na Europa do século XV que a trigonometria começou a ganhar importância, graças à influência de vários matemáticos, sobretudo o alemão Johann Müller, mais conhecido pelo nome latino Regiomontanus que trabalhou pela organização da trigonometria como uma

disciplina independente da astronomia, além de escrever vários livros sobre tema, como de triangulis, em 1464 (DOLCE, O. 2013, p.44).

Pensando em tornar o conteúdo da geometria menos complicado e usar de uma metodologia que não seja a que recorre a semelhança de triângulos, esse trabalho foi escrito com o objetivo de se apresentar uma metodologia para o ensino e discussão do conteúdo semelhança de triângulos usando como recurso a malha quadriculada, para que o aluno possa observar as relações métricas existentes entre as medidas dos elementos de um triângulo retângulo (catetos, hipotenusa, altura e projeções).

A seguir apresentamos os referenciais teóricos utilizados nessa pesquisa, explicando em poucas palavras qual a ideia de cada autor que contribuiu para o nosso trabalho, em seguida descrevemos como o trabalho foi feito na seção de metodologia. Na seção de análise e resultados apresentamos o conteúdo para ensinar relações métricas no triângulo retângulo que foi produzido, depois apresentamos nossas conclusões sobre nossa pesquisa e produção científica e por último listamos nossas referências bibliográficas.

2.Referencial Teórico

O ensino da geometria tem sido marcado por dificuldades tanto no processo de ensino como no processo de aprendizagem, como afirmado por Silva & Barbosa (2022, p. 2). Esses autores ainda apontam as causas disso como a má formação de professores e os livros didáticos que durante muito tempo fizeram uma abordagem que omitiam a geometria.

Um exemplo disso é o conteúdo de relações métricas no triângulo retângulo. Este é um exemplo de conteúdo em que o professor tem dificuldade para ensinar e os alunos têm dificuldade para aprender. A forma mais comum de se ensinar esse conteúdo é deduzindo as seis fórmulas que constituem as relações métricas e em seguida resolvendo exemplos, como ressaltado por (DIMMEL & HERBST, 2020, p. 72).

Atualmente o Exame Nacional do Ensino Médio dá um tempo calculado de 03(Três) minutos apenas para resolução de cada questão. Sem o argumento de Chevallard(1991) isto seria praticamente impossível, pois a questão na maioria delas tem um texto longo e com vários argumentos em que o estudante tem que desembaraçar e voltar para sua realidade para resolver:

“Um conteúdo de saber que tenha sido definido como saber a ensinar, sofre, a partir de então, um conjunto de transformações adaptativas que irão torná-lo apto a ocupar um lugar entre os objetos de ensino. O ‘trabalho’ que faz de um objeto de saber a ensinar, um objeto de ensino, é chamado de transposição didática.” (CHEVALLARD, 1991, p.39).

Atualmente o Exame Nacional do Ensino Médio dá um tempo calculado de 03(Três) minutos apenas para resolução de cada questão. Sem o argumento de Chevallard (1991) isto seria praticamente impossível, pois a questão na maioria delas tem um texto longo e com vários argumentos em que o estudante tem que desembaraçar e voltar para sua realidade para resolver. Destaca-se nesta proposta o destaque para o Ensino por Atividades, que na concepção de CABRAL (2017):

Modelo de ensino que possibilita a reconstrução das ideias matemáticas por trás dos algoritmos “desalmados” na maioria das vezes, tem um efeito mais significativo e duradouro nas funções psicológicas superiores dos alunos. (CABRAL, 2017, p.12).

Desta forma ajudaremos o aluno a encontrar um sentido no que estão realizando, e que sintam que tem potencial para fazer, utilizando um conceito mais simples e razoável, sem o algebrismo que muitas vezes causa obstáculos intransponíveis no raciocínio lógico do aluno. Através da sequência didática proposta é possível o professor diferenciar os conteúdos expostos e como trabalhar possibilitando objetivos mais concisos e fundamentais para o entendimento, sendo necessários que estejam ligadas entre si de forma que possam contemplar os mais diversos conteúdos sendo necessário estabelecer etapas. Para Oliveira (2013), conceito de sequência didática:

Um procedimento simples que compreende um conjunto de atividades conectadas entre si, e prescinde de um planejamento para delimitação de cada etapa a fim de trabalhar os conteúdos disciplinares de forma integrada para otimizar o processo de ensino aprendizagem. (OLIVEIRA, 2013, p.39).

Alguns autores têm sugerido outras formas de se ensinar e abordar o conteúdo de relações métricas no triângulo retângulo em sala de aula, como é o caso de Lamas & Mauri (2006) que usaram materiais emborrachados e da robótica para ensinar esse conteúdo e Pires (2018) que usa o software geogebra para ensinar esse conteúdo.

Precisamos ainda citar o caso do autor Franskowiak (2022), que relata as aulas deste plano de trabalho, conforme dito antes, foram pensadas para o 9º do ensino fundamental, visando desenvolver as seguintes habilidades previstas pela Base Nacional Comum Curricular, BRASIL (2018):

(EF09MA13) 1. Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos. (EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes (BRASIL, 2018, p.52).

Além disso, recorreremos a recursos algébricos e visuais para demonstrar as relações métricas nos triângulos retângulos em conjunto com os discentes, procurando estimular o diálogo para que eles tenham uma participação ativa na construção do pensamento matemático de tal forma que consigam produzir argumentos geométricos e algébricos convincentes. Nesse sentido, nosso propósito foi desenvolver as seguintes competências da BNCC (BRASIL, 2018):

2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo. 3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções (BRASIL, 2018, p.55).

Diante do exposto entendemos que é necessário se repensar como se ensinar o conteúdo de relações métricas no triângulo retângulo, de uma forma que não seja a tradicional dedução das seis fórmulas usando a semelhança de triângulos que é tão difícil para os alunos entenderem.

3. Metodologia

A metodologia que usamos para escrever esse texto foi a pesquisa qualitativa, se trata de um estudo teórico-propositivo, uma vez que nos baseamos na leitura de artigos e monografias de outros autores que escreveram sobre a dificuldade de se ensinar geometria e em particular as relações métricas no triângulo, e autores que escreveram sobre metodologias mais eficazes para se ensinar esse conteúdo, como o uso de materiais concretos, robótica, software geogebra entre outros. Acrescentamos a essas leituras nossa experiencia em ensinar matemática. Ao longo dos anos que trabalhamos como professores e ensinamos esse conteúdo já tínhamos ideias de como ensinar esse conteúdo de uma maneira diferente.

A pesquisa realizada nesse trabalho se deu de maneira qualitativa, pois como definido por Godoy (1995, p. 21) nessa modalidade de pesquisa “... o pesquisador vai ao campo buscando “captar” o fenômeno em estudo a partir da perspectiva das pessoas nele envolvidas, considerando todos os pontos de vista relevantes.”

Outro fato que ressalta que nossa pesquisa é qualitativa em que é destacado a pesquisa do autor participante “a utilização de uma forma de observação mais próxima e a harmonização dos procedimentos de construção do dado às características do objeto ao qual se aplicam, a submissão do método às peculiaridades do contexto empírico ao qual ele se aplica.” (CARDANO, 2017, p. 10).

Estudo teórico-propositivo, FRANSKOWIAK. et al, (2022):

Momento 1: Apresentação de um triângulo retângulo, mostrando suas características como o ângulo reto, a hipotenusa e os catetos. Finalizando

com exemplos onde os estudantes terão que identificar os catetos e a hipotenusa dos triângulos apresentados.

Momento 2: A partir de um triângulo retângulo ABC com a sua altura h em relação a hipotenusa como base, vamos concluir juntamente com os alunos que teremos dois novos triângulos onde um de seus catetos é h e esses serão semelhantes ao original de altura h .

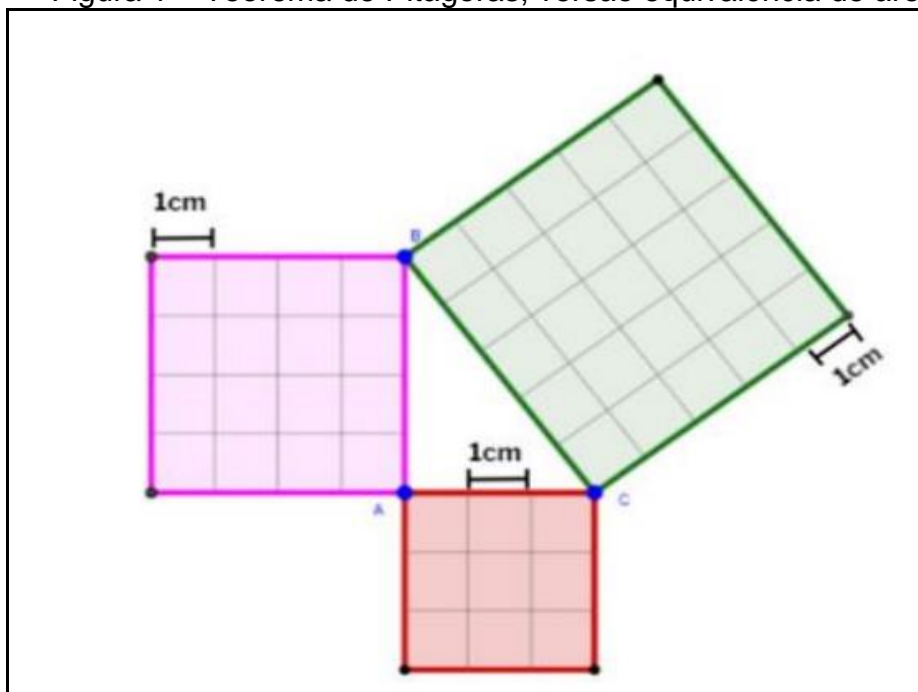
Momento 3: A partir disso mostramos um problema em que os alunos tiveram que obter as medidas dos catetos de um triângulo retângulo. Isso mostrou para eles uma aplicação do Teorema de Pitágoras.

Momento 4: Neste momento apresentamos a seguinte figura para os alunos: (FRANSKOWIAK. et al 2022, p. 4).

A partir da figura 1, foi realizada as seguintes perguntas foram propostas aos alunos:

1. Calcule a área dos dois quadrados menores;
2. Some a área desses quadrados menores;
3. Calcule área do quadrado maior;
4. O que podemos observar com os cálculos da questão 2 e 3?
5. Qual a relação com o Teorema de Pitágoras?

Figura 1 – Teorema de Pitágoras, versão equivalência de áreas.



Fonte: Franskowiak. et al (2022)

Com base na aplicação deste plano de aula teve como objetivo principal

desenvolver a capacidade dos discentes em identificar e lidar com problemas envolvendo o conteúdo contemplado no planejamento. Além disso, promover o senso crítico por meio da investigação com referência à matemática pura, de modo que os estudantes compreendessem as deduções das fórmulas obtidas a partir das relações métricas em triângulos retângulos, de modo que eles desenvolvessem a capacidade de argumentar sobre o que está sendo explicitado.

Importante destacar ainda, o conteúdo foi pensado e disposto de forma que os estudantes revisassem assuntos previstos para as modalidades de Números e Álgebra e Geometria do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental. Ou seja, integrando diferentes modos de enxergar e desenvolver a matemática e por isso, tornando o processo de aprendizado mais completo (FRANSKOWIAK. et al 2022, p, 5).

Para a obtenção das referências bibliográficas, foi consultada a plataforma google academico. Digitamos o termo “Relações métricas no triângulo retângulo” e obtivemos 7860 resultados sugeridos pela plataforma. Seleccionamos textos que destacavam a dificuldade de se ensinar e aprender “Relações métricas no triângulo retângulo”, e exemplos de metodologias de ensino e aprendizagem na sala de aula que não eram as tradicionais deduções de fórmulas usando a semelhança de triângulos.

Feito isto, apresentamos o texto que discute as relações métricas no triângulo retângulo de uma maneira diferente da forma tradicional em que se deduz as seis fórmulas das relações métricas empregando a semelhança de triângulos, usando de nossa experiência como professores e dos resultados dos artigos de nossa referência bibliográfica que lemos. Nosso resultado está apresentado a seguir.

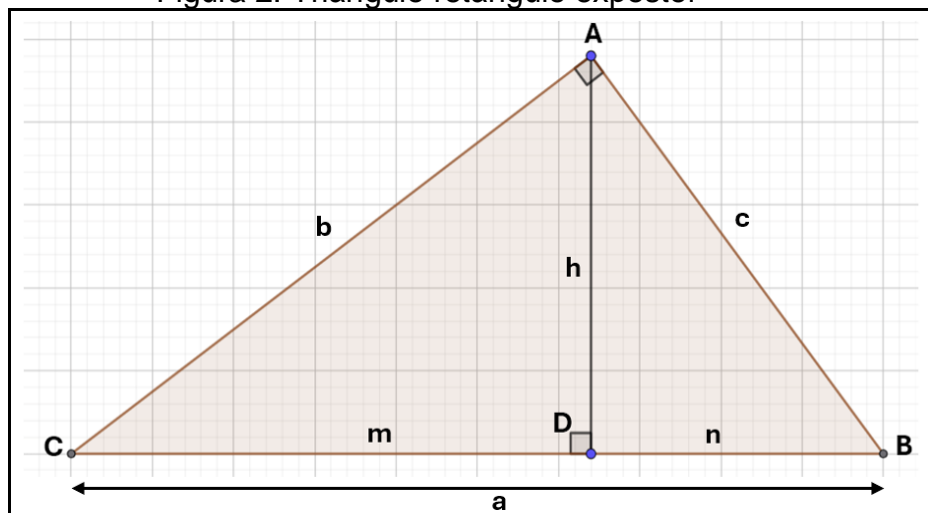
4. Análise e Resultados

Pensando em tornar o ensino do conteúdo de relações métricas no triângulo retângulo mais simples tanto para professores quanto para alunos, foi pensado em uma abordagem usando malhas quadriculadas que descrevermos a seguir.

Num triângulo retângulo, os lados perpendiculares, aqueles que formam um ângulo de 90° , são denominados **catetos** e o lado oposto ao ângulo de 90° recebe

o nome de **hipotenusa**.

Figura 2: Triângulo retângulo exposto.



Fonte: Autores.

Na figura 2, temos um triângulo retângulo onde:

a: hipotenusa

b e c: catetos

m e n: projeções dos catetos b e c respectivamente

h: altura relativa a hipotenusa

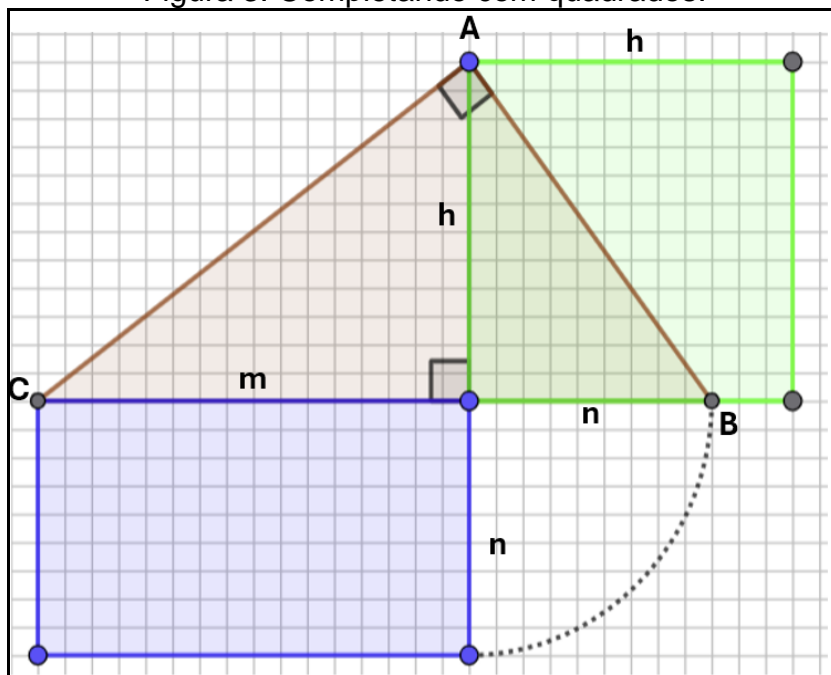
Esses elementos possuem relações entre suas medidas, chamadas relações métricas do triângulo retângulo dessa forma mais ampla, adotamos a perspectiva do materialismo inclusivo, que busca descentralizar o humano como agente de toda ação e abarca as variedades de "corpos" envolvidos em uma interação em sala de

aula, incluindo o corpo da matemática. Essa perspectiva teórica pressupõe um entrelaçamento material entre os vários "corpos", o que nos permite compreender como o conceito matemático de variável geométrica pode emergir e é indissociável das palavras, gestos e ações sobre os objetos físicos na sala de aula (SINCLAIR & FERRARA, 2016, p. 12).

vejam essas relações.

- ❖ O quadrado de lado igual a altura h tem a mesma área que o retângulo formado pelas projeções m e n .

Figura 3: Completando com quadrados.

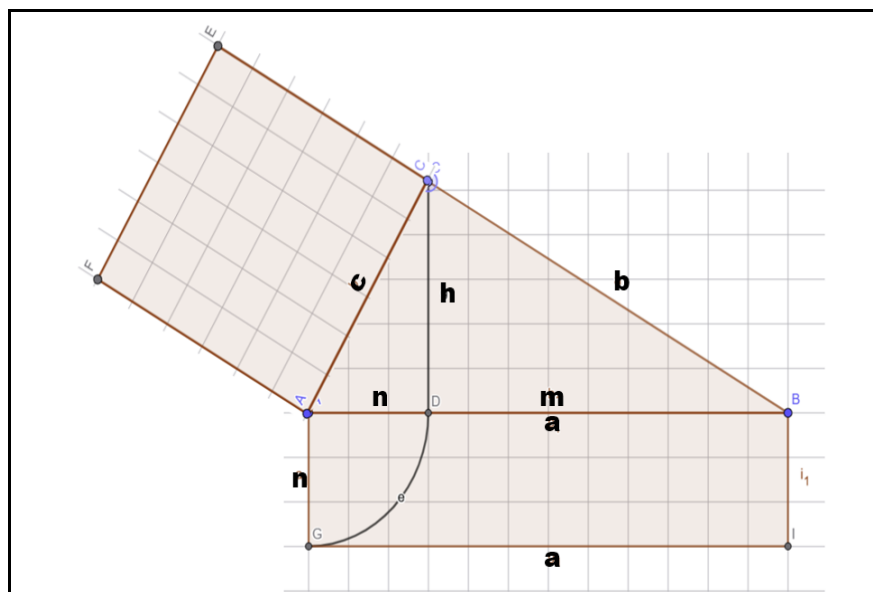


Fonte: Autores.

Esta relação vista na figura 3 pode ser escrita de forma algébrica $h^2 = m.n$

- ❖ O quadrado com lado igual ao cateto c possui área igual ao retângulo formado pela hipotenusa a e pela projeção do cateto n .

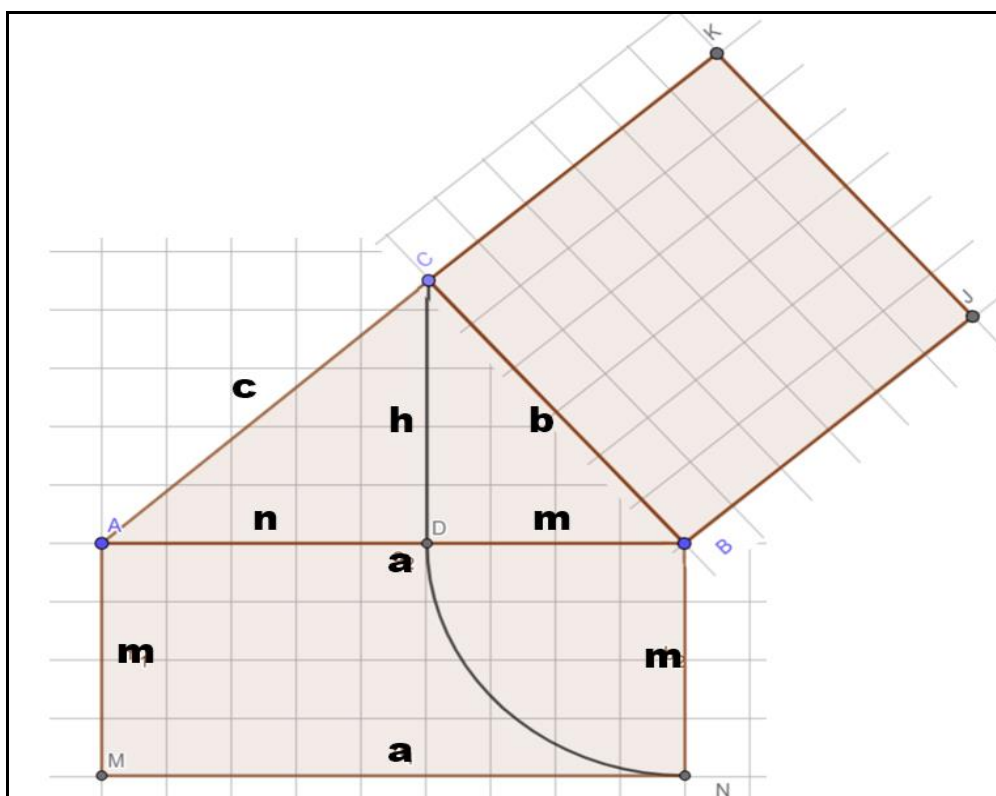
Figura 4. Completando os quadrados



Fonte: Autores.

Esta relação vista na figura 4, pode ser escrita de forma algébrica como $c^2 = a \cdot n$

Figura 5 (Trocando os retângulos).



Fonte: Autores.

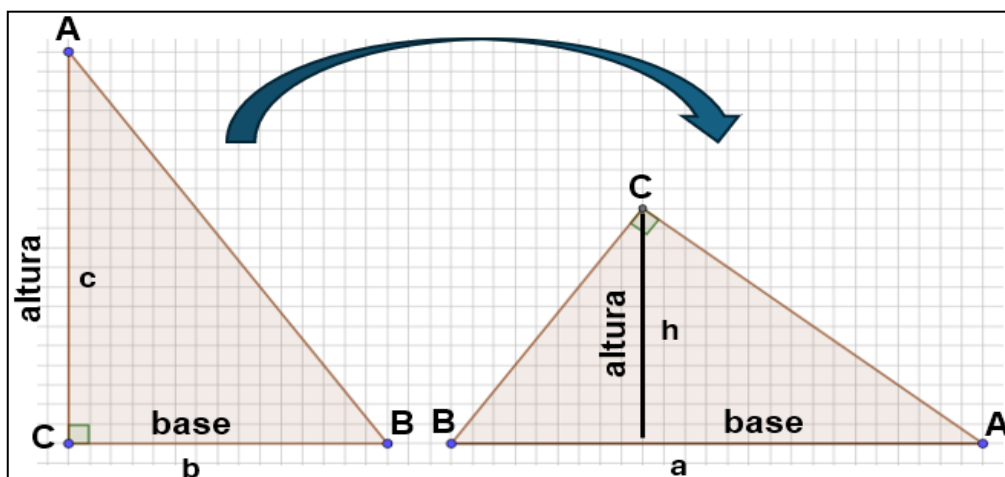
Na figura 5 de maneira similar ao visto anteriormente usamos o cateto **b** obtendo

$$b^2 = a.m$$

- ❖ A multiplicação da hipotenusa **a** à altura **h** é igual a multiplicação dos catetos **b** e **c**.

Observe na figura 6 que pegamos o mesmo triângulo e nos “deitamos” sem alterar nenhuma medida, por se tratar do mesmo triângulo sua área (que depende da base e da altura como vimos no caderno anterior).

Figura 6: Transpondo os lados



Fonte: Autores

Observe que **a.h** é a mesma independente de sua posição, sendo que na primeira posição base e altura são os catetos **b** e **c**, enquanto na segunda a base é a hipotenusa **a** e a altura **h**. Esta relação pode ser escrita de forma algébrica:

$$a.h = b.c.$$

5.Considerações Finais

Nesse estudo, após serem feitas leituras de artigos e outros textos acadêmicos, refletirmos em nossa experiência como professores de matemática, concluímos que o estudo das relações métricas no triângulo retângulo, como geralmente é feito usando a semelhança de triângulos para deduzir as fórmulas é o recomendado pela BNCC, é bom para o professor ensinar, mas não tão simples para o aluno aprender.

Existem outras formas de se ensinar esse conteúdo como o uso de materiais concretos, uso de software como o geogebra e de outras tecnologias como a robótica, que se mostram mais prazerosas e bem aceitas pelos alunos. Tais metodologias são excelentes alternativas para se ensinar o conteúdo de relações métricas no triângulo retângulo, mas de uma forma geral todas são embasadas na semelhança de triângulos; em nosso texto buscamos abordar o conteúdo de relações embasando com o conceito de área, apoiado em malhas quadriculadas que acreditamos ser mais simples para o entendimento uma vez que o aluno precisa contar quadrados para verificar as relações de igualdade.

Podemos observar que mesmo nos problemas geométricos a solução é bem mais simples do que a solução algébrica. No processo normal algébrico, ficaríamos com inúmeras simplificações que poderiam sem dúvida confundir o aluno e deixar a questão para traz sem resolvê-la, pois, irá tomar muito trabalho e tempo.

Uma boa proposta para trabalhos futuros seria aplicar uma atividade em sala de aula onde o aluno por meio da redescoberta possa encontrar as relações, tal atividade poderia estar associada ao uso de materiais concretos como tiras de malha quadriculada retiradas de um lugar para encaixar em outro fazendo a comparação entre as áreas para se obter a igualdade desejada, ou que esse processo seja feito por meio de softwares de geometria dinâmica como GEOGEBRA, Cabri Geometry entre outros. Esse processo já é usado para se estudar o teorema de Pitágoras e se mostra bem aceito.

Por fim, ao se trabalhar conteúdos complicados como o de relações métricas no triângulo retângulo, sempre se é possível usar de abordagens diferentes da tradicional, em que não se utiliza raciocínios dedutivos complicados como o que

tradicionalmente é feito usando a semelhança de triângulos para se deduzir as relações métricas no triângulo retângulo.

REFERÊNCIAS

ARCAVI, A. ***The role of visual representations in the learning of mathematics.*** Weizmann Institute of Science, Israel. Mathematics in School, 19(2), 19-23, 2003.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC, 2018.

CABRAL, N. F. **Sequências didáticas:** estrutura e elaboração. Belém PA:SBEM/PA, 2017.

CARDANO, M. **Manual de pesquisa qualitativa. A contribuição da teoria da argumentação.** Tradução: Elisabeth da Rosa Conill. Petrópolis, Rio de Janeiro: Vozes, 2017.

CARRAHER, D. W., SCHLIEMANN, A. D., & SCHWARZ, J. L. ***Early algebra ≠ algebra early.*** In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), Algebra in the early grades (pp. 235–272). New York, NY: Lawrence Erlbaum Associates, 2008.

CHEVALLARD, Yves. (1991). ***La transposition didactique:*** du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble: La Pensée Sauvage.

DIAS, G. N.; DOS REIS, C. P.; DA SILVA, K. P.; BEIRÃO, A. T. M.; VOGADO, G. E. R.; DA ROCHA, H. O.; BARRETO, W. D. L.; PINHEIRO, H. M.; DA SILVA JUNIOR, W. L. P.; DE SOUZA JÚNIOR, J. C. B. **A utilização de funções circulares aplicando a geometria do triângulo retângulo.** OBSERVATÓRIO DE LA ECONOMÍA LATINOAMERICANA, [S. l.], v. 22, n. 2, p. e3347, 2024. DOI: 10.55905/oelv22n2-167.

DIMMEL, J. K., & HERBST, P. G. ***Proof transcription in high school geometry: A study of what teachers recognize as normative when students present proofs at the board.*** Educational Studies in Mathematics, 105(1), 71-89, 2020.

DOLCE, O. **Fundamentos de matemática elementar 9:** geometria plana / Osvaldo Dolce, José Nicolau Pompeo. -- 9. ed. -- São Paulo : Atual, 2013.

FRANSKOWIAK, G. L. et al. **Relações métricas no triângulo retângulo:** relato de uma prática de ensino no PIBID–matemática. Anais do XVII Seminário Institucional

do PIBID-UFRGS. Porto Alegre, 2022. Disponível em:
<https://lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/246939/001141631.pdf?sequence=1>
_Acesso em: 13 jan. 2026.

JONES, K. ***Issues in the Teaching and Learning of Geometry***. In: L. Haggarty (Ed.), *Aspects of Teaching Secondary Mathematics: perspectives on practice* (pp. 121-139). London: RoutledgeFalmer, 2020.

OLIVEIRA, M. M. **Sequência Didática Interativa no Processo de Formação de Professores**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2013.

GODOY, A. S. **Pesquisa qualitativa: tipos fundamentais**. Revista de Administração de empresas, v. 35, p. 20-29, 1995. Disponível em: <http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8739934>. Acesso em: 13 jan. 2026.

LAMAS, R. C. P.; MAURI, J. O **Teorema de Pitágoras e as relações métricas no triângulo retângulo com material emborrachado**. Núcleos de Ensino da Unesp, p. 815-825, 2006.

MATA-PEREIRA, J. PONTE, J. P. **Promover o Raciocínio Matemáticos dos Alunos**: uma investigação baseada em design Bolema, v. 32, n 62, 2018.

MORAIS, C.; SERRAZINA, L.; PONTE, J. P. **Mathematical Reasoning Fostered by (Fostered) Transdormations of Rational Number Representations**. Acta Scientiae, Canoas (RS), v. 20, n 04, p. 552-570, 2018.

MOSS, J. & BEATTY, R. **Knowledge Building and Mathematics: Shifting the Responsibility for Knowledge Advancement and Engagement**. Canadian Journal of Learning and Technology, 36(1), 2010. Retrieved from <http://www.cjlt.ca/index.php/cjlt/article/view/575>.

PIRES, K. M. **Relações métricas no triângulo retângulo com GeoGebra**. Dissertação de Mestrado – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Campos São José do Rio Preto. Programa em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, São José do Rio Preto, 2018.

RADFORD, L. **Elementary forms of algebraic thinking in young students**. In M. F. Pinto & T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 4, pp. 73–80). Belo Horizonte: PME, 2010.

RIVERA, F. D. ***Toward a visually-oriented school mathematics curriculum.*** Research, theory, practice, and issues. New York: Springer, 2011.

STYLIANIDES, G. ***Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks.*** Mathematical Thinking and Learning, v.11, n. 4, p. 258-288, 2010.

SILVA, I. P. & BARBOSA, E. J. T. **A Teoria Antropológica do Didático como uma ferramenta metodológica para o estudo das relações métricas no triângulo retângulo.** Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas, v. 18, n. 41, p. 142-158, 2022.

SINCLAIR, N. & FERRARA, F. ***An early algebra approach to pattern generalisation: Actualising the virtual through words, gestures and toilet paper.*** Educational Studies in Mathematics, 92(1), 1-19, 2016. doi: 10.1007/s10649-015-9674-3.