

## A MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA COM A TORRE DE HANÓI E A LENDA DO XADREZ

## MATHEMATICAL MODELING IN THE TEACHING OF EXPONENTIAL FUNCTIONS: A DIDACTIC SEQUENCE WITH THE TOWER OF HANOI AND THE LEGEND OF CHESS

## LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA EN LA ENSEÑANZA DE FUNCIONES EXPONENCIALES: UNA SECUENCIA DIDÁCTICA CON LA TORRE DE HANÓI Y LA LEYENDA DEL AJEDREZ

**Janiel Aureliano de Lima**

Mestrando em Matemática/Profmat, Instituto Federal do Piauí - IFPI

E-mail.: [janielmatematica7@gmail.com](mailto:janielmatematica7@gmail.com)

**Guilherme Luiz de Oliveira Neto**

Doutor, Instituto Federal do Piauí – IFPI, Brasil

E-mail: [guilherme@ifpi.edu.br](mailto:guilherme@ifpi.edu.br)

**Ronaldo Campelo da Costa**

Doutor e Professor Titular do Instituto Federal do Piauí – IFPI, Picos/PI, Brasil

E-mail.: [ronaldocampelo@ifpi.edu.br](mailto:ronaldocampelo@ifpi.edu.br)

### Resumo

Este artigo analisa as contribuições da modelagem matemática no ensino da função exponencial por meio de uma sequência didática desenvolvida com estudantes da 3ª série do Ensino Médio de uma escola pública em Palmeirais – PI. A pesquisa, de natureza qualitativa, foi realizada a partir de uma abordagem experimental e fundamentada em metodologias ativas, com o objetivo de investigar como o uso de instrumentos concretos pode favorecer a compreensão do crescimento exponencial. A intervenção pedagógica foi estruturada em oficinas envolvendo dois cenários investigativos: a Torre de Hanói e a Lenda do Xadrez. Na primeira, os estudantes exploraram a relação entre o número de discos e a quantidade mínima de movimentos, identificando o modelo exponencial  $2^n - 1$ . Na segunda, analisaram a duplicação de grãos no tabuleiro de xadrez, construindo o modelo da soma de uma progressão geométrica. Durante as atividades, formularam hipóteses, organizaram dados em tabelas, construíram gráficos e interpretaram os resultados. Os achados evidenciam que a abordagem favoreceu o desenvolvimento do raciocínio lógico, a compreensão do comportamento exponencial e a participação ativa dos estudantes. Conclui-se que a modelagem matemática, aliada ao uso de materiais manipuláveis, constituiu uma estratégia eficaz e significativa para o ensino de funções exponenciais.

**Palavras-chave:** Modelagem Matemática; Função Exponencial; Metodologia Ativa; Sequência Didática

### Abstract

This article analyzes the contributions of mathematical modeling to the teaching of the exponential function through a didactic sequence developed with 3rd grade high school students from a public school in Palmeirais, Piauí, Brazil. The qualitative research was conducted using an experimental approach and based on active methodologies, aiming to investigate how the use of concrete tools

can enhance the understanding of exponential growth. The pedagogical intervention was structured in workshops involving two investigative scenarios: the Tower of Hanoi and the Legend of Chess. In the first, students explored the relationship between the number of discs and the minimum number of moves, identifying the exponential model  $2^n - 1$ . In the second, they analyzed the doubling of grains on the chessboard, constructing a model of the sum of a geometric progression. During the activities, they formulated hypotheses, organized data in tables, constructed graphs, and interpreted the results. The findings show that the approach fostered the development of logical reasoning, the understanding of exponential behavior, and the active participation of the students. It is concluded that mathematical modeling, combined with the use of manipulable materials, constituted an effective and meaningful strategy for teaching exponential functions.

**Keywords:** Mathematical Modeling; Exponential Function; Active Methodology; Didactic Sequence

## Resumen

Este artículo analiza las contribuciones del modelado matemático a la enseñanza de la función exponencial mediante una secuencia didáctica desarrollada con estudiantes de tercer grado de bachillerato de una escuela pública en Palmeirais, Piauí, Brasil. La investigación cualitativa se llevó a cabo utilizando un enfoque experimental y metodologías activas, con el objetivo de investigar cómo el uso de herramientas concretas puede mejorar la comprensión del crecimiento exponencial. La intervención pedagógica se estructuró en talleres que involucraron dos escenarios de investigación: la Torre de Hanoi y la Leyenda del Ajedrez. En el primero, los estudiantes exploraron la relación entre el número de discos y el número mínimo de movimientos, identificando el modelo exponencial  $2^n - 1$ . En el segundo, analizaron la duplicación de granos en el tablero de ajedrez, construyendo un modelo de la suma de una progresión geométrica. Durante las actividades, formularon hipótesis, organizaron datos en tablas, construyeron gráficos e interpretaron los resultados. Los hallazgos muestran que el enfoque fomentó el desarrollo del razonamiento lógico, la comprensión del comportamiento exponencial y la participación activa de los estudiantes. Se concluye que el modelado matemático, combinado con el uso de materiales manipulables, constituye una estrategia eficaz y significativa para la enseñanza de funciones exponenciales.

**Palabras clave:** Modelado matemático; Función exponencial; Metodología activa; Secuencia didáctica

## 1. Introdução

Não importa o tempo, se é passado, presente ou futuro, a matemática vai estar sempre presente e quando estudamos as funções matemáticas, em especial da função exponencial, representa um dos pilares do currículo de Matemática no Ensino Médio. Sua relevância transcende as paredes da sala de aula, manifestando-se em fenômenos biológicos, como a reprodução bacteriana; em contextos financeiros, por meio dos juros compostos; e em situações cotidianas recentes, como a análise da disseminação de epidemias. Conforme destaca a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), é essencial que o estudante seja capaz de "interpretar e construir modelos para resolver problemas em diversos contextos" (Brasil, 2018), desenvolvendo o que se denomina letramento matemático.

Entretanto, o cenário atual do ensino dessa temática revela uma discrepância entre a teoria e a prática. A prática docente, muitas vezes, ainda se encontra ancorada em uma visão puramente formalista. Um dos maiores obstáculos no processo de ensino-aprendizagem da Matemática reside na assimilação de temas abstratos. Nesse sentido, Bassanezi (2019) argumenta que a aplicação do saber matemático visa identificar os componentes centrais de um problema real para, então, estruturá-los em um ambiente formal, permitindo que o raciocínio ocorra de maneira precisa, econômica e lógica. A abordagem mecânica é um dos principais fatores que levam às dificuldades de aprendizagem, onde o estudante frequentemente confunde o crescimento exponencial com o crescimento linear, não percebendo a "explosão" característica das funções de base superior a um.

Diante dessa problemática, a Modelagem Matemática apresenta-se não apenas como um método, mas como uma alternativa pedagógica capaz de ressignificar o aprendizado. Para Biembengut e Hein (2024), a modelagem é o processo de investigar uma situação-problema da realidade e traduzi-la para a linguagem matemática, permitindo ao aluno participar ativamente da construção do conhecimento. Ao invés de receber um modelo pronto, o estudante é desafiado a percorrer etapas de interação, matematização e validação.

Boaler (2018, p.167) reforça essa ideia ao afirmar que “o ato de modelar pode ser visto como a simplificação de qualquer problema da vida em uma forma matemática pura que pode ajudar a resolvê-lo”. Nesse sentido, o erro e a experimentação passam a ser partes integrantes do processo de aprendizagem, e não apenas falhas a serem corrigidas.

Neste artigo, propõe-se uma Sequência Didática (SD) que utiliza dois cenários investigativos clássicos e lúdicos: a Torre de Hanói e a Lenda do Xadrez. A escolha desses instrumentos justifica-se pela riqueza de padrões que oferecem. A Torre de Hanói, com sua estrutura recursiva, permite ao estudante deduzir a lei de formação por meio da observação direta dos movimentos. Já a Lenda do Xadrez (ou Lenda de Sessa) oferece um contexto histórico e dramático que ilustra de forma impactante a magnitude do crescimento exponencial,

confrontando a intuição do estudante com a realidade dos cálculos.

O objetivo central deste trabalho é, portanto, analisar como a aplicação dessa sequência didática, fundamentada nos pressupostos da Modelagem Matemática, contribui para a evolução do pensamento algébrico dos estudantes. Busca-se observar se a transição entre o manuseio de materiais concretos e a formalização matemática auxilia na superação das dificuldades históricas associadas ao tema, promovendo uma aprendizagem que seja, ao mesmo tempo, rigorosa e significativa.

A justificativa deste estudo reside na necessidade de mitigar a escassez de metodologias práticas e investigativas no ensino de álgebra na Educação Básica, com foco no Ensino Médio, visando a recomposição da aprendizagem sobre o comportamento das funções exponenciais. Ao propor a utilização de cenários experimentais e materiais manipuláveis, a oficina busca converter a abstração teórica presente nos livros didáticos em uma experiência tangível e visual. Assim, por meio da Modelagem Matemática, o estudante deixa de ser um mero receptor de fórmulas prontas para se tornar o construtor de modelos de crescimento, preenchendo a lacuna deixada pelo formalismo excessivo e pela falta de estratégias que conectem os conceitos matemáticos a fenômenos observáveis e dinâmicos.

Ao longo das próximas seções, serão discutidos os aportes teóricos que sustentam esta proposta, os detalhes da metodologia aplicada em sala de aula e os resultados obtidos, que analisaram o potencial de transformação de uma prática pedagógica investigativa no contexto do Ensino Médio.

## 2. Revisão da Literatura

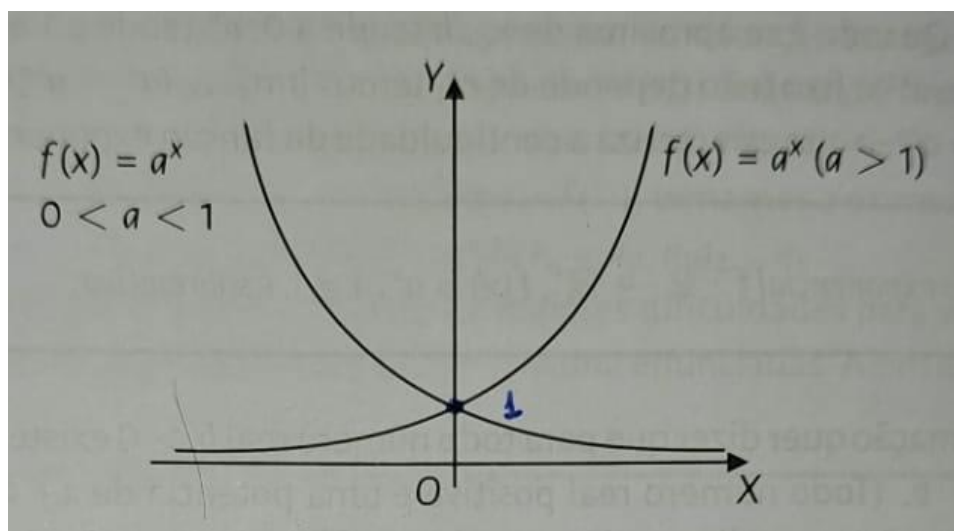
Esta seção dedica-se à fundamentação teórica que sustenta a presente investigação, correlacionando estudos sobre modelagem matemática e o ensino de funções exponenciais com as competências previstas para o Ensino Médio, com ênfase na utilização de cenários lúdicos e históricos.

## 2.1 Conceito de Funções Exponenciais

A literatura matemática, representada pelas obras de lezzi, Dolce e Murakami (2013), define a função exponencial como uma relação de dependência onde a base  $a$  deve ser maior que zero e diferente de um, contribuindo que o contradomínio seja composto estritamente por números reais positivos. Essa estrutura é o que permite modelar fenômenos de crescimento ou decréscimo acelerado, onde a lei de formação assume a configuração, sendo fundamental para a compreensão de padrões geométricos em diversas áreas.

Segundo Lima (2023), a forma mais simples para exibir o gráfico de uma função exponencial é da forma  $f(x) = a^x$  nos casos  $a > 1$  e  $0 < a < 1$ . A figura 1, mostra o esboço dos gráficos.

Figura 1 – Gráfico da função  $f(x) = a^x$ , com  $a > 1$  (crescente) e  $0 < a < 1$  (decréscante)



Fonte: Lima, 2023, p.170

A visualização gráfica constitui uma etapa essencial da modelagem. Segundo a fundamentação teórica de lezzi, Dolce e Murakami (2013), o gráfico de uma função exponencial apresenta uma curva característica que não assume valores negativos, ocupando apenas a região superior do plano cartesiano em relação ao eixo x. Para o estudante, observar que a curva sempre atravessa o ponto (0, 1) e mantém uma tendência de crescimento (quando  $a > 1$ ) facilita a validação do modelo matemático construído a partir de atividades lúdicas, consolidando a transição do dado discreto para a representação contínua.

Quando  $a > 1$  nota-se que, quando  $x$  varia da esquerda para direita, a curva exponencial  $f(x) = a^x$  apresenta um crescimento bastante lento enquanto  $x$  é negativo. À medida que  $x$  cresce, o crescimento de  $y$  se torna cada vez mais acelerado. Isto se reflete na inclinação da tangente ao gráfico; para valores positivos muito grandes de  $x$  a tangente é quase vertical. O crescimento exponencial supera o de qualquer polinômio. (Lima, 2023, p.170)

Os autores destacam que o gráfico nunca toca o eixo horizontal e que passa pelo ponto 1 no eixo vertical, eles também deixam claro que o valor de  $a$  é o que define se a curva sobe ou desce. Em resumo, a representação visual traduz o que acontece na fórmula: um crescimento que começa devagar, mas que rapidamente se torna muito mais veloz do que qualquer função polinomial de primeiro ou segundo grau.

## 2.2 A modelagem Matemática no Ensino de Funções Exponenciais

No cenário contemporâneo da Educação Matemática, a modelagem é compreendida como o ato de investigar e traduzir fenômenos do mundo real por meio de estruturas físicas ou matemáticas (Góes; Góes, 2023). Mais do que uma técnica, essa abordagem consolida-se como uma estratégia pedagógica que rompe com o formalismo descontextualizado ao permitir que o estudante atribua significado a conceitos abstratos.

Sob o prisma epistemológico, a matemática deixa de ser vista como uma verdade imutável para ser entendida como um conhecimento construído socialmente. Conforme argumentam Lima, Lopes e Vieira (2024), os modelos resultantes desse processo são aproximações interpretativas da realidade, sujeitos a escolhas e simplificações do modelador. Essa perspectiva é reforçada por Negrelli e Cifuentes (2013), que situam a prática da modelagem em um campo investigativo onde a elaboração de hipóteses e a mediação entre a linguagem cotidiana e a matemática são essenciais para a produção de novos saberes.

O estudo de funções é o núcleo da formação matemática no Ensino Médio, pois estabelece a base para a compreensão de relações de dependência entre grandezas (Paraná, 2008). Ao integrar a modelagem a este conteúdo, o professor cria um elo direto com o cotidiano, tornando o aprendizado dinâmico e focado no protagonismo do aluno (Almeida; Silva, 2010; Santos; Assis; Assis, 2024).

Esta metodologia alinha-se às competências da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), especialmente no desenvolvimento da autonomia e do pensamento crítico frente a fenômenos sociais e naturais (Ashtiani; Demarchi, 2025). A transição entre tabelas, gráficos e expressões algébricas deixa de ser uma tarefa mecânica e passa a ser uma ferramenta de interpretação do mundo real.

A função exponencial é frequentemente apontada como um dos temas de maior dificuldade devido ao seu caráter abstrato e à tendência de um ensino puramente técnico. Contudo, seu potencial de aplicação em áreas como demografia e saúde pública é vasto (Ashtiani; Demarchi, 2025). Para superar a visão limitada da manipulação de fórmulas, a modelagem convida o estudante a uma postura lúdica e intuitiva, onde a sensibilidade para escolher a ferramenta certa é tão importante quanto o domínio do cálculo (Biembengut; Hein, 2024).

A investigação de situações-problema permite que o estudante construa seus próprios dados e reconheça relações multiplicativas, facilitando a transição do pensamento linear para o exponencial (Santos et al., 2025). Como aponta Bassanezi (2019), o objetivo final é que o estudante consiga extrair a essência de um problema e formalizá-la com clareza. Assim, a sala de aula transforma-se em um ambiente de pesquisa, facilitando a passagem do pensamento concreto para o abstrato de maneira consistente (Sousa et al., 2025).

Ao posicionar o estudante no centro do processo de aprendizagem, a modelagem matemática configura-se como uma metodologia ativa. Segundo Bacich e Moran (2018), essas estratégias são vitais para a participação efetiva na construção do saber. O engajamento gerado por abordagens investigativas tende a ser superior ao do ensino tradicional, preparando o jovem para os desafios de um mundo interconectado (Gouvea et al., 2024).

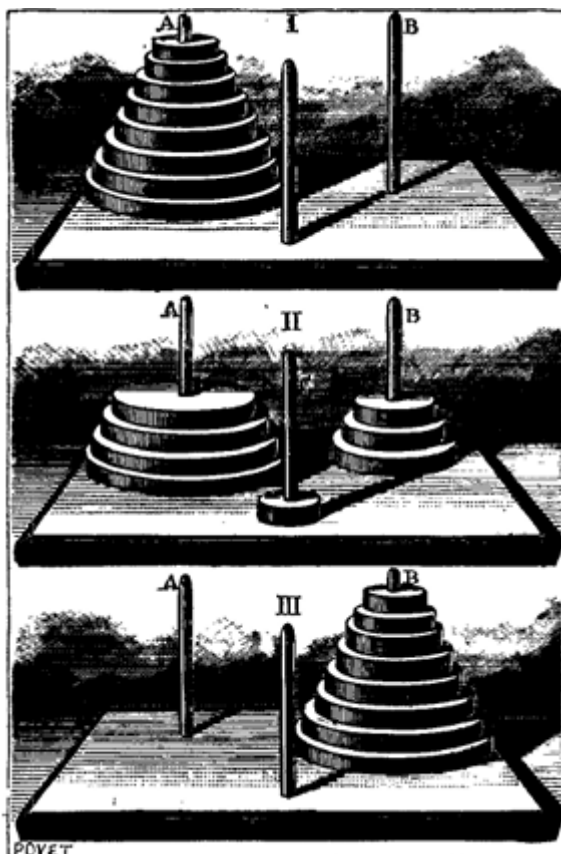
## 2.3 Instrumentos concretos: Torre de Hanói e Lenda do Xadrez

### 2.3.1 A Torre de Hanói

O quebra-cabeça das Torres de Hanói foi introduzido no ocidente em 1883 pelo matemático francês François Édouard Anatole Lucas. Conforme explicam Ferreira e Oliveira (2023), a denominação do jogo foi uma estratégia de marketing

da época, inspirada na cidade de Hanói, capital do Vietnã, que estava em evidência nos periódicos parisienses devido aos conflitos coloniais franceses no sudeste asiático, conforme a figura 2.

Figura 2 – Ilustração da Torre de Hanói do século XIX



Fonte: Ferreira e Oliveira, 2023, p.2

Associada ao jogo, existe uma célebre lenda que fundamenta seu caráter místico e matemático. Segundo a narrativa, no Grande Templo de Benares, monges de Bramah dedicam-se à tarefa de transferir 64 discos de ouro entre três agulhas de diamante, seguindo a regra de que um disco maior nunca deve sobrepor um menor. De acordo com a profecia, o mundo chegaria ao fim no instante em que o último movimento fosse concluído. Entretanto, ao analisar a situação sob a ótica da modelagem, percebe-se que a execução perfeita dessa tarefa exigiria  $2^{64} - 1$  movimentos; considerando um deslocamento por segundo, seriam necessários mais de 584 bilhões de anos para a finalização (Ferreira;

Oliveira, 2023), o que ilustra de forma contundente o comportamento da função exponencial.

Para a exploração matemática desse recurso, é necessário observar as regras que regem a dinâmica do jogo, as quais impõem os limites lógicos para a modelagem. De acordo com Ferreira e Oliveira (2023), o quebra-cabeça consiste em transferir todos os discos de uma haste de origem para uma haste de destino, respeitando-se rigorosamente três condições:

1. Apenas um disco pode ser movimentado por vez;
2. Cada movimento consiste em retirar o disco superior de uma das hastes e posicioná-lo no topo de outra haste ou sobre uma haste vazia;
3. Um disco maior nunca poderá ser colocado sobre um disco menor.

A imposição dessas restrições é o que conduz o estudante à percepção do padrão recursivo. A figura 3 tem 10 discos.

Figura 3 – Uma torre de Hanói com 10 discos



Fonte: Elaboração dos autores, 2026.

### 2.3.2 A Lenda do Xadrez

A Lenda do Xadrez, amplamente difundida na obra de Malba Tahan (2023), narra a história do sábio Sessa, que, ao apresentar o jogo de xadrez a um rei indiano, recebeu o direito de escolher sua própria recompensa. O pedido, aparentemente modesto, consistia na entrega de grãos de trigo seguindo uma regra de duplicação: um grão pela primeira casa do tabuleiro, dois pela segunda, quatro pela terceira, e assim sucessivamente, dobrando a quantidade a cada nova casa até atingir a sexagésima quarta.

Do ponto de vista da modelagem, o cenário proposto por Sessa revela o funcionamento de uma progressão geométrica de razão 2, que pode ser expressa pela função exponencial. Conforme relata Tahan (2023), a execução total do pagamento resultaria em uma montanha de trigo que cobriria toda a superfície da Índia, somando mais de 18 quintilhões de grãos. Este recurso permite que o estudante compreenda a "explosão" dos valores na função exponencial, confrontando a intuição linear inicial com a realidade do crescimento geométrico.

### 3. Metodologia

Em relação aos procedimentos metodológicos, a presente investigação caracteriza-se como uma pesquisa de abordagem qualitativa, de natureza aplicada, configurando-se como uma pesquisa-intervenção, uma vez que envolveu a implementação e análise de uma sequência didática em contexto real de sala de aula. O estudo também apresenta caráter exploratório e descritivo, na medida em que buscou compreender como os estudantes constroem o conceito de função exponencial a partir de atividades de modelagem matemática.

O campo empírico da pesquisa foi uma escola pública localizada no município de Palmeirais – PI, envolvendo uma turma de 25 estudantes da 3ª série do Ensino Médio, selecionados por critério de conveniência. A escolha do grupo se deu em função da atuação do pesquisador como docente da turma, o que favoreceu o acompanhamento contínuo das atividades e a coleta sistemática de dados.

A produção dos dados ocorreu ao longo da aplicação de uma sequência didática estruturada em cinco encontros, organizados em três etapas: (i) introdução aos conceitos de modelagem matemática; (ii) revisão dos conteúdos prévios relacionados à função exponencial; e (iii) desenvolvimento das oficinas práticas com a Torre de Hanói e a Lenda do Xadrez. Durante esse processo, foram utilizados diferentes instrumentos de coleta de dados, tais como: registros escritos produzidos pelos estudantes (tabelas, cálculos e generalizações), observações diretas do pesquisador durante as atividades, registros fotográficos das oficinas e respostas à atividade de autoavaliação.

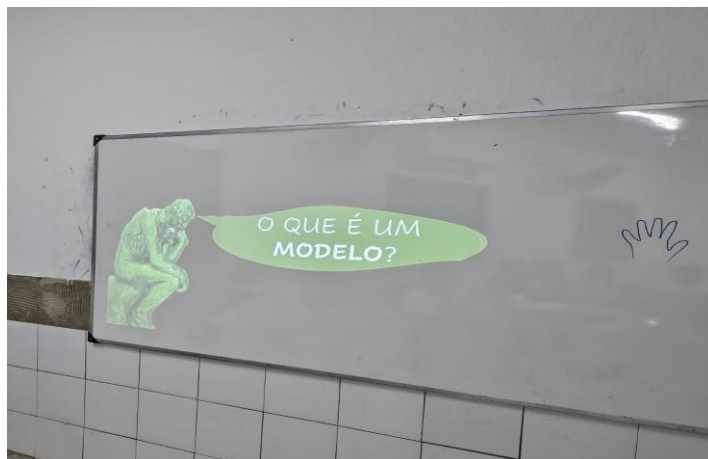
No que se refere aos procedimentos de análise dos dados, adotou-se uma abordagem qualitativa de caráter interpretativo, fundamentada na técnica de análise de conteúdo. Inicialmente, os dados foram organizados e sistematizados conforme sua natureza (produções escritas, falas dos estudantes e registros das atividades). Em seguida, realizou-se uma leitura flutuante com o objetivo de identificar padrões, regularidades e evidências relacionadas à compreensão do conceito de função exponencial.

Posteriormente, os dados foram categorizados em eixos de análise previamente definidos, tais como: (a) identificação de padrões e regularidades; (b) construção de modelos matemáticos; (c) compreensão do crescimento exponencial; e (d) percepção dos estudantes sobre a aprendizagem. A interpretação dos dados buscou evidenciar como a modelagem matemática contribuiu para a transição do pensamento empírico para o pensamento algébrico, considerando as interações ocorridas durante as atividades.

As etapas interpretativas buscaram evidenciar as articulações entre as ações desenvolvidas na sequência didática e os processos de construção do conhecimento matemático, com ênfase na transição do pensamento empírico para o pensamento algébrico. Desse modo, a análise não se restringiu aos produtos finais elaborados pelos estudantes, mas privilegiou a compreensão dos percursos cognitivos, das interações estabelecidas e das estratégias mobilizadas ao longo da intervenção pedagógica.

A primeira etapa, com uma aula, foi dedicada à introdução dos pressupostos da Modelagem Matemática, destacando sua relevância na interpretação de fenômenos reais, como indica na figura 4.

Figura 4 – Aula sobre Modelagem Matemática



Fonte: Elaboração dos autores, 2026.

Já a segunda, com uma aula, procedeu-se à revisão dos conceitos fundamentais de potências e funções exponenciais, estabelecendo a base necessária para o desenvolvimento da terceira etapa, com três aulas, que foi a realização das oficinas práticas envolvendo a Torre de Hanói, Lenda do Xadrez e uma autoavaliação. Nessas atividades, os estudantes foram incentivados a coletar dados, identificar regularidades e construir, de forma coletiva, os modelos de crescimento exponencial que regem cada cenário proposto.

Trabalhamos o conceito de potenciação e foi feito uma explanação sobre funções utilizando o aplicativo geogebra no próprio smartphone dos estudantes, mostrando diferentes gráficos, quando era função ou não, conforme a figura a 5.

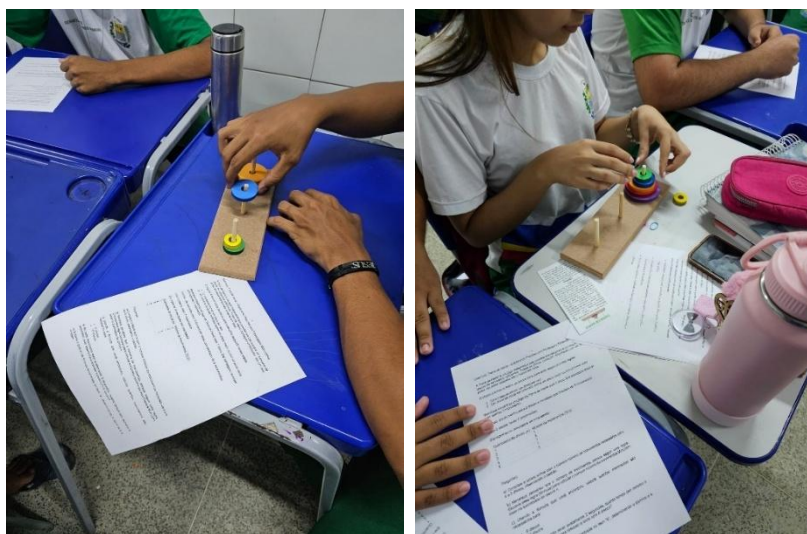
Figura 5 – Aula sobre Potências e Funções Exponenciais



Fonte: Elaboração dos autores, 2026

O terceiro momento, conforme a figura 6, foi iniciado de forma contextualizada com uma história sobre a Torre de Hanoi, abordando um pouco da história do jogo, funcionamento, estratégias para resolver com três pinos. Para este jogo a turma foi dividida em grupos e cada grupo ficou com uma torre e cada estudante recebeu uma cópia da história e regras do jogo. E foi analisado o desenvolvimento das jogadas com o objetivo sempre em fazer em menor movimentos possíveis. Os estudantes também receberam uma tabela com a quantidade de discos para preencherem os resultados com o número mínimo de movimentos. Teve o momento de socialização das respostas e chegamos em um modelo matemático que mostrou como calculava para  $n$  discos com a quantidade mínima de movimentos. E ainda construíram o gráfico do modelo encontrado e por fim foram feitas indagações sobre o jogo.

Figura 6 – Oficina Torre de Hanói



Fonte: Elaboração dos autores, 2026

Com a conclusão da oficina sobre a Torre de Hanói, partimos para próxima oficina, que foi a História do Xadrez, iniciando também de forma contextualizada com uma história que tem no livro “O homem que calculava” de Malba Tahan. Essa história foi distribuída uma cópia para cada estudante. O nome da história é: “O Problema do Jogo de Xadrez”, onde foram construídos tabuleiros de xadrez em sala de aula e substituímos os grãos de trigo por feijão, mostrando aos estudantes que a mente humana subestima o crescimento exponencial, onde o objetivo não

era contar uma história mas explorar as emoções e a surpresa que ela evoca, explorando a ideia que a percepção muda drasticamente e o que parecia um crescimento linear de repente surge um crescimento exponencial, surgindo a seguinte indagação: será que eu preciso colocar todos os caroços de feijão para saber a quantidade exata de feijões? Assim foi explorando o raciocínio lógico e interpretando o gráfico gerado pelo modelo matemático. Na tabela 1, vai descrever exatamente os materiais usados durante a oficina. Na primeira aula, correspondeu a construção do tabuleiro e os questionamentos acerca da história da Lenda do Xadrez e na segunda aula, foi a validação através da modelagem matemática. A figura 7 ilustra o desenvolvimento da oficina.

Tabela 1 - Materiais para a lenda do Xadrez

Materiais Necessários
Poster do desenho de um tabuleiro 2x2
Régua
Cola
Feijões
Tesoura

Fonte: Elaboração dos autores, 2026

Figura 7 – Feijão, substituindo os grãos de trigo.



Fonte: Elaboração dos autores, 2026

A intervenção pedagógica consistiu na implementação de uma sequência didática estruturada em cinco encontros, organizados em três momentos: introdução aos pressupostos da Modelagem Matemática, revisão de conceitos prévios e desenvolvimento de oficinas investigativas com a Torre de Hanói e a Lenda do Xadrez. Durante as atividades, os estudantes foram organizados em grupos e orientados a coletar dados, identificar regularidades, construir tabelas, elaborar representações gráficas e propor modelos matemáticos.

Ressalta-se que, nesta seção, buscou-se descrever os procedimentos adotados e o contexto de realização da intervenção. A análise dos dados produzidos pelos estudantes será apresentada na seção seguinte, de modo a evidenciar os processos de construção do conhecimento ao longo da sequência didática.

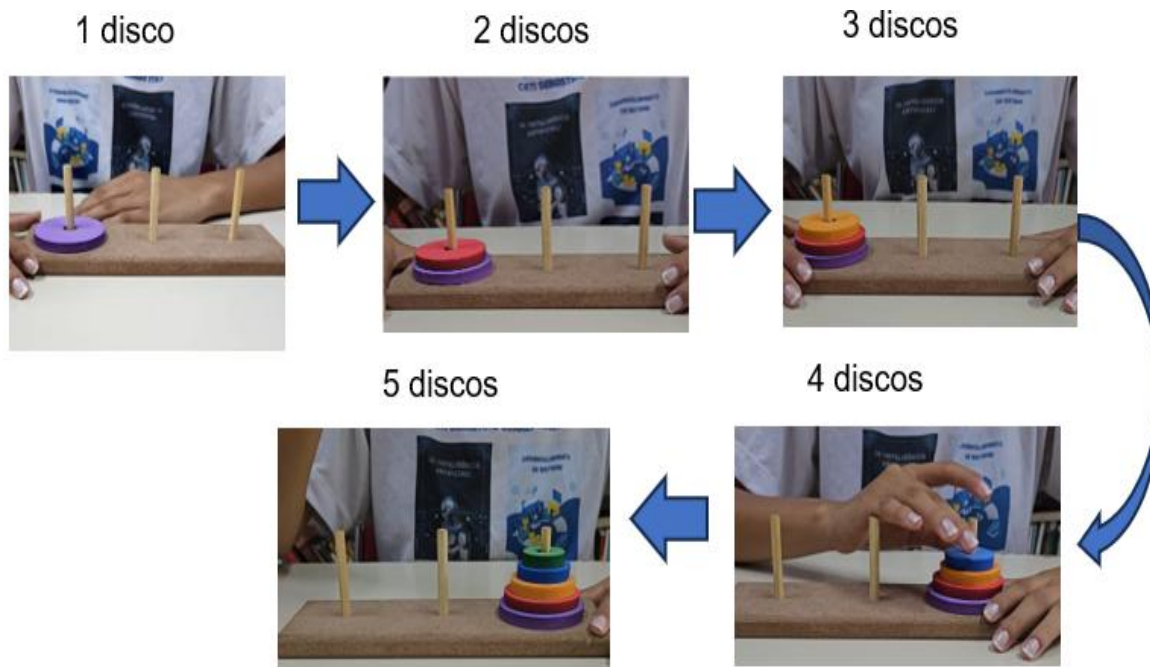
#### **4. Resultados e Discussão**

Esta seção apresenta os resultados produzidos a partir da implementação da sequência didática, bem como sua análise à luz do referencial teórico adotado. Inicialmente, são descritas as produções dos estudantes no decorrer das atividades. Em seguida, procede-se à interpretação desses dados, buscando compreender os processos de construção do conceito de função exponencial no contexto da Modelagem Matemática.

##### **4.1 Oficina com a Torre de Hanói**

Para a execução da oficina, os alunos foram orientados sobre as regras da Torre de Hanói e desafiados a transportar a pilha de discos entre as extremidades com o número mínimo de movimentos. A dinâmica seguiu uma ordem crescente de complexidade, iniciando com um disco e avançando gradualmente até o uso de cinco, conforme a figura 8. Esse processo de experimentação foi marcado por descobertas sucessivas, em que as tentativas e os erros serviram como base para que os estudantes refinassem suas estratégias e reiniciassem os movimentos até atingirem o objetivo proposto.

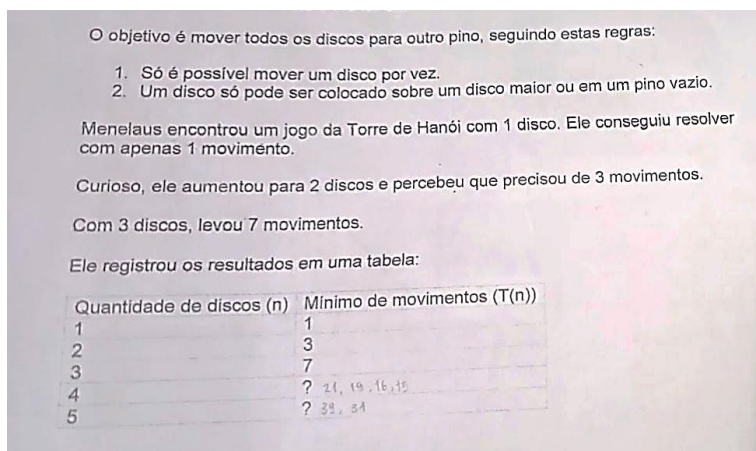
Figura 8 – Sequência de complexidade do jogo Torre de



Fonte: Elaboração dos autores, 2026

Durante a atividade com a Torre de Hanói, os estudantes registraram os seguintes resultados: para 1 disco, 1 movimento; para 2 discos, 3 movimentos; para 3 discos, 7 movimentos. A partir dessa base, os estudantes foram desafiados a determinar, por meio da experimentação e sem o auxílio de fórmulas prévias, o número mínimo de movimentos para quatro e cinco discos. Embora nenhum dos cinco grupos tenha atingido o resultado correto na primeira tentativa, esse processo de tentativa e erro foi essencial para a identificação de padrões. Conforme ilustra a Figura 9, a aplicação da modelagem matemática permitiu que os estudantes explorassem as regularidades do jogo para construir o conceito de crescimento exponencial de forma intuitiva. Os registros do grupo apresentados ilustram o processo de investigação para quatro discos. Inicialmente, os estudantes realizaram 21 movimentos, reduzindo para 19 e 16 em tentativas posteriores, até atingirem o número mínimo de 15 movimentos na quarta execução

Figura 9 – Quantidade mínima de movimento com quatro e cinco discos



Fonte: Elaboração dos autores, 2026

Embora a complexidade aumentasse com cinco discos, a percepção de padrões permitiu que o grupo alcançasse o êxito (31 movimentos) já na segunda tentativa, após um resultado inicial de 39. Conforme destaca Smole, Diniz e Milani (2007, p. 10), "o erro é uma consideração importante a ser trabalhada, sendo que o jogo reduz a consequência dos erros e dos fracassos do jogador, permitindo que ele desenvolva iniciativa, autoconfiança e autonomia".

Com a tabela completada que está descrita na tabela 2, eles tinham objetiva de determinar o modelo que poderia determinar a quantidade mínima de movimentos sem fazer nenhum movimento no jogo. Dos cinco grupos tivemos dois grupos que perceberam que os resultados mínimos de movimentos eram números antecessores de potência de base dois, onde a quantidade de discos eram os expoentes.

Tabela 2 - Modelando a quantidade mínima de movimentos

Quantidade de discos	Números mínimos de movimentos
1	$2^1 - 1$
2	$2^2 - 1$
3	$2^3 - 1$
4	$2^4 - 1$
5	$2^5 - 1$

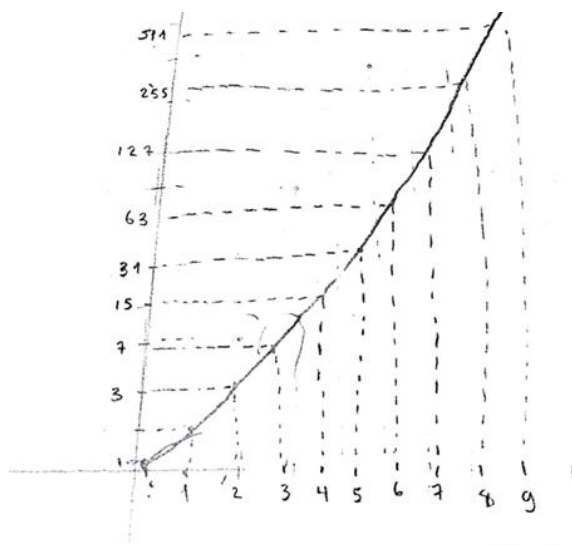
Fonte: Elaboração dos autores, 2026

Com a tabela 3 modelada, ficou fácil para descobrir com  $n$  discos. A partir desses registros, observou-se que parte dos grupos identificou a relação entre os valores obtidos e potências de base 2, expressando os resultados na forma  $T(n) = 2^n - 1$ , onde  $T(n)$  é o número mínimo de movimentos necessários para resolver a Torre de Hanói.

Esse movimento evidencia a emergência de um padrão recursivo, indicando a transição de uma abordagem empírica, baseada na experimentação, para uma formulação de natureza algébrica, na medida em que implica abstrair regularidades em consonância com os pressupostos da Modelagem Matemática.

. Assim eles determinaram a quantidade mínima de movimentos de 6 a 10 discos. Com a quantidade encontrada de movimentos, eles construíram o gráfico conforme figura 10, que formou o modelo.

Figura 10 – Gráfico do modelo  $T(n) = 2^n - 1$



Fonte: Elaboração dos autores, 2026

Os estudantes deixaram de ser receptores da função exponencial para se tornarem seus descobridores. Concluímos assim a oficina com a Torre de Hanói, onde os estudantes utilizaram estratégias pois à medida que os discos aumentavam, surgia a necessidade de identificar um padrão e com o gráfico perceberam que o número de movimentos crescia muito rápido, ou seja, era uma função exponencial.

## 4.2 Oficina com a Lenda do Xadrez

A condução dos experimentos ocorreu sob total protagonismo dos estudantes, o que assegurou a autenticidade dos dados coletados e a fidedignidade dos resultados. O processo prático — que envolveu desde a organização do tabuleiro até a distribuição física dos grãos (Figura 11) evidenciou a eficácia da Modelagem Matemática como estratégia para o desenvolvimento cognitivo. Esta abordagem está em estreita consonância com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), especificamente no que tange à habilidade EM13MAT508, que propõe: "Identificar e associar sequências numéricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas" (Brasil, 2018, p. 541).

Figura 11 - Aplicação da história da Lenda do Xadrez



Fonte: Elaboração dos autores, 2026

De acordo com a história da Lenda do Xadrez, era um grão de trigo na primeira casa, dois na segunda, quatro na terceira, oito na quarta, dezesseis na quinta casa e assim dobrando sucessivamente, conforme apresentado na tabela 3, que descreve a quantidade de feijões por casa, ou seja,

Tabela 3 - Quantidade de feijões por casa

Casas do tabuleiro	Quantidade de feijões por casa
1 <sup>a</sup>	1
2 <sup>a</sup>	2
3 <sup>a</sup>	4
4 <sup>a</sup>	8
5 <sup>a</sup>	16

Fonte: Elaboração dos autores, 2026

Através da tabela 3, os estudantes perceberam que a quantidade de feijões por casa no tabuleiro era de base 2:  $2^0$ ,  $2^1$ ,  $2^2$ ,  $2^3$  e  $2^4$ . Foi perguntado qual seria a quantidade de feijões que ficaria na última casa. Os grupos fizeram a seguinte associação, conforme a tabela 4 abaixo:

Tabela 4 - Quantidade de feijões na base 2

Casas do tabuleiro	Quantidade de feijões por casa
1 <sup>a</sup>	$1=2^0$
2 <sup>o</sup>	$2=2^1$
3 <sup>a</sup>	$4=2^2$
4 <sup>a</sup>	$8=2^3$
5 <sup>a</sup>	$16 = 2^4$
6 <sup>a</sup>	$32=2^5$
64 <sup>a</sup>	$X= 2^{63}$

Fonte: Elaboração dos autores, 2026

Dessa forma, ao estabelecerem o modelo matemático  $a_n = 2^{n-1}$ , em que  $a_n$  representa a quantidade de grãos em cada casa do tabuleiro, mantendo uma relação direta com o expoente, sendo este sempre o antecessor da posição da

casa. Em seguida, os grupos foram desafiados a criar um modelo que representasse a soma total de grãos para um número qualquer de casas.

Durante a experimentação com as seis primeiras casas, obteve-se o total de 63 grãos. Ao serem questionados sobre a natureza dessa sequência, houve divergência inicial entre Progressão Aritmética (PA) e Progressão Geométrica (PG). Entretanto, ao analisarem o processo de obtenção do termo seguinte, o Grupo 3 identificou que a base 2 indicava uma multiplicação constante, caracterizando, portanto, uma PG.

Diante do desconhecimento generalizado sobre a fórmula da soma de uma PG finita, propôs-se que os grupos deduzissem um modelo próprio para calcular o total de grãos do tabuleiro. Como estratégia de investigação, os grupos 2, 3 e 5 organizaram rapidamente os dados na Tabela 5, buscando identificar o padrão matemático que rege a soma da sequência."

Tabela 5 – Modelando a soma de feijões

Casas	Soma de feijões
1 <sup>a</sup>	$1 = 2^1 - 1$
1 <sup>a</sup> , 2 <sup>a</sup>	$1 + 2 = 3 = 2^2 - 1$
1 <sup>a</sup> , 2 <sup>a</sup> , 3 <sup>a</sup>	$1 + 2 + 4 = 7 = 2^3 - 1$
1 <sup>a</sup> , 2 <sup>a</sup> , 3 <sup>a</sup> , 4 <sup>a</sup>	$1 + 2 + 4 + 8 = 15 = 2^4 - 1$
1 <sup>a</sup> , 2 <sup>a</sup> , 3 <sup>a</sup> , 4 <sup>a</sup> , 5 <sup>a</sup>	$1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31 = 2^5 - 1$
1 <sup>a</sup> , 2 <sup>a</sup> , 3 <sup>a</sup> , 4 <sup>a</sup> , 5 <sup>a</sup> , 6 <sup>a</sup>	$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63 = 2^6 - 1$
1 <sup>a</sup> , 2 <sup>a</sup> , 3 <sup>a</sup> , 4 <sup>a</sup> , 5 <sup>a</sup> , 6 <sup>a</sup> , ..., 64 <sup>a</sup>	$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \dots + 2^{63} = 2^{64} - 1$

Fonte: Elaboração dos autores, 2026

Os grupos de estudantes chegaram à conclusão que o modelo matemático seria  $S(n) = 2^n - 1$ , onde  $S(n)$  representou a soma acumulada de grãos de trigo, o que reforçou a articulação entre diferentes representações — numérica, tabular e algébrica — contribuindo para a consolidação do conceito de crescimento

exponencial. Foi uma oficina que prendeu atenção dos estudantes, desde a história até o modelo matemático.

#### 4.3 Autoavaliação das oficinas

Para o encerramento das atividades, solicitou-se aos estudantes que indicassem quais aspectos mais contribuíram para a compreensão do conteúdo abordado. Essa etapa configurou-se como um processo de autoavaliação, com o propósito de analisar a percepção discente acerca de sua própria aprendizagem. Tal instrumento encontra respaldo na Competência Geral 10 da Base Nacional Comum Curricular, que propõe o desenvolvimento da capacidade de agir de forma autônoma e responsável, tanto no âmbito individual quanto coletivo, tomando decisões fundamentadas em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários (Brasil, 2018).

O Quadro 1 apresentou fragmentos das respostas dos estudantes à atividade de autoavaliação, sendo analisado como um conjunto de dados perceptivos que expressam a experiência vivenciada durante a intervenção.

Quadro 1 - Respostas subjetivas dos estudantes sobre as oficinas

Participantes	Respostas dos estudantes: "O que mais te ajudou a entender o conteúdo?"
Estudante A	"As aulas de forma prática, tornando mais leve e fácil o aprendizado."
Estudante B	"Às aulas de modelagem matemática, as oficinas que concedeu à prática e também o professor. A experiência foi única porque mostrava na realidade a função exponencial."
Estudante C	"A forma em que o professor explicava usando a modelagem matemática."
Estudante D	"Foi a forma da modelagem que ajudou bastante sobre o conteúdo e de acordo com as explicações do professor em sala de aula."
Estudante E	"O professor está explicando de uma forma melhor e fácil para entender o conteúdo."
Estudante F	"As aulas com o professor explicando melhor, e tirando as dúvidas com os colegas e as divisões em grupo."
Estudante G	"Na forma que o professor explica, de uma forma mais dinâmica, fica um pouco melhor para entender."
Estudante H	"A aplicabilidade da modelagem matemática e as oficinas em grupos."
Estudante I	"O professor, os trabalhos em grupos e as aulas extras."

Estudante J	“Com ajuda das oficinas realizadas na sala de aula, usando a modelagem matemática para ter melhor entendimento do assunto.”
Estudante K	“As aulas de modelagem, os trabalhos em grupos, as aulas bem explicadas.”
Estudante L	“Ajuda da modelagem e as oficinas e as aulas práticas.”
Estudante M	“Aplicações de problemas.”
Estudante N	“Experimentos feitos nas oficinas ajudaram a compreender de forma mais didática e com materiais simples, e a modelagem matemática e as aulas em grupo.”
Estudante O	“Trabalhar com materiais concretos.”
Estudante P	“Aplicações práticas em problemas e as oficinas de modelagem matemática.”
Estudante Q	“Resolver os problemas usando os modelos matemáticos.”
Estudante R	“Os gráficos.”
Estudante S	“A forma de explicar, utilizando jogos e experimentos. Assim deixando as aulas mais leve e promovendo um bom aprendizado.”
Estudante T	“As aulas práticas com experimentos feitos em grupos, ou em duplas, que ajudaram na compressão da função exponencial.”
Estudante U	“A prática que o professor ensina nas aulas de modelagem matemática.”
Estudante V	“A aplicação do conteúdo com representações e trabalho em grupo.”
Estudante W	“As aulas práticas, a modelagem matemática e a explicação do professor.”
Estudante X	“Usar a modelagem matemática no estudo das funções exponenciais.”
Estudante Y	“Os experimentos que deixa a aula mais interessante e mais fácil para compreender o conteúdo.”

Fonte: Elaboração dos autores, 2026

A análise das respostas evidenciou a recorrência de elementos relacionados à dimensão prática e interativa da sequência didática, como o uso de materiais concretos, a realização de atividades em grupo e a mediação docente. Tais aspectos foram frequentemente associados pelos estudantes à facilitação da compreensão do conteúdo.

Contudo, ressaltou-se que essas manifestações deveriam ser compreendidas como percepções subjetivas dos participantes, não se configurando, de forma isolada, como indicadores de aprendizagem conceitual. Nesse sentido, os dados apresentados no quadro foram considerados de maneira complementar às evidências oriundas das produções matemáticas e das observações realizadas durante as oficinas.

Assim, o conjunto dessas informações contribuiu para uma compreensão mais abrangente dos efeitos da intervenção, articulando dimensões cognitivas e perceptivas do processo de aprendizagem.

## 5. Considerações Finais

A presente pesquisa buscou investigar as potencialidades da Modelagem Matemática e do uso de instrumentos concretos, como a Torre de Hanói e a Lenda do Xadrez, no ensino de funções exponenciais para estudantes do Ensino Médio. Ao longo das oficinas realizadas, observou-se que a transição de um modelo tradicional de ensino para uma abordagem fundamentada em metodologias ativas permitiu uma participação mais crítica e protagonista dos estudantes.

Os resultados obtidos indicaram que a exploração lúdica e experimental foi capaz de ressignificar o erro, transformando-o em uma etapa necessária da investigação e do refinamento de estratégias. A utilização da Torre de Hanói permitiu que os estudantes percebessem, de forma tátil, a recursividade e o crescimento acelerado dos movimentos, enquanto a Lenda do Xadrez materializou a magnitude da progressão geométrica, facilitando a dedução de modelos algébricos complexos a partir de situações práticas.

Verificou-se que a sequência didática promoveu o desenvolvimento de habilidades previstas pela BNCC, integrando conceitos de sequências numéricas e funções de forma orgânica. A superação da resistência inicial frente à quando o foco é só cálculo, confirmou que, quando o conhecimento é construído por meio da investigação e da descoberta, a compreensão torna-se mais sólida e duradoura.

Apesar dos resultados apontarem contribuições importantes da Modelagem Matemática para o ensino da função exponencial, é necessário destacar algumas limitações deste estudo. Primeiramente, a pesquisa foi realizada com apenas uma turma da 3ª série do Ensino Médio, em uma escola pública do município de Palmeirais – PI, o que limita a possibilidade de generalizar os resultados para outras realidades escolares.

Outra limitação está relacionada ao tempo de aplicação da sequência didática, que ocorreu em poucos encontros. Esse período não permite avaliar de forma mais aprofundada se os conhecimentos construídos pelos estudantes se mantêm ao longo do tempo. Estudos com maior duração poderiam trazer resultados mais consistentes nesse sentido.

Diante dessas limitações, sugere-se que pesquisas futuras ampliem o número de participantes, investiguem diferentes contextos escolares e desenvolvam intervenções por um período maior, com o objetivo de aprofundar a compreensão sobre o uso da Modelagem Matemática no ensino de funções exponenciais.

Em suma, a experiência em uma escola pública em Palmeirais – PI ratifica a importância da Modelagem Matemática como ferramenta capaz de aproximar os conteúdos curriculares da realidade e do interesse dos estudantes. Espera-se que este trabalho possa servir de incentivo para que outros docentes adotem recursos manipuláveis e cenários investigativos em suas práticas, visando uma educação matemática cada vez mais significativa e emancipadora.

## Referências

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, A. Por uma Educação Matemática Crítica: a Modelagem Matemática como alternativa. *Educ. Matem. Pesq.*, São Paulo, v.12, n.2, 221-241, 2010. Disponível em <http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/2752/3304>. 30 mai.2025

ASHTIANI, Alireza Mohebi; DEMARCHI, Tatielen. MODELAGEM MATEMÁTICA ASSOCIADA A UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE FUNÇÃO EXPONENCIAL. *Revista de Produtos Educacionais e Pesquisas em Ensino*, [S. l.], v. 9, n. 3, p. 5–25, 2025. Disponível em: <https://periodicos.uenp.edu.br/index.php/reppe/article/view/1953>. Acesso em: 29 jan. 2026

BACICH, Lilian. MORAN, José. Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem teórico-prática. – Porto Alegre: Penso, 2018.

BASSANEZI, R.C. Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia.4. ed.,2ª impressão. – São Paulo: Contexto, 2019

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. Modelagem matemática no ensino. – 3ª ed – São Paulo: Contexto, 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. 2018.

Disponível em

[https://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC EI EF 110518\\_versaofinal\\_site.pdf](https://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf). Acesso em 19 mai. de 2025

BOALER, Jo. Mentalidades Matemáticas: estimulando o potencial dos estudantes por meio da matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador. Porto Alegre: Penso, 2018.

FERREIRA, Débora Borges; OLIVEIRA, Edvan Pontes de. *A matemática no jogo de Torres de Hanói*. Rio de Janeiro: SBM – Sociedade Brasileira de Matemática, 2023. Disponível em: < [https://sbm.org.br/wp-content/uploads/2023/06/Torre de Hanoi SBM.pdf](https://sbm.org.br/wp-content/uploads/2023/06/Torre_de_Hanoi_SBM.pdf)>. Acesso em: 8 fev. 2026.

GÓES, Anderson Roges Teixeira; GÓES, Heliza Colaço. Modelagem matemática: teoria, pesquisa e práticas pedagógicas. 2. ed. rev. e atual. Curitiba: Intersaberes, 2023. (Série matemática em sala de aula).

GOUVEA, Erica; VEIGA, Susana Aparecida da; RICETTO, Katia Celina da Silva; FERREIRA, Willian José; MOURA, Roque Antônio de. Aplicação de análise estatística na educação matemática: avaliação da eficácia da metodologia ativa no ensino como método inovador. *Revista Ciências Exatas*, Taubaté, v. 30, n. 2, 2024. DOI: <https://doi.org/10.69609/1516-2893.2024.v30.n2.a3886>

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MURAKAMI, Carlos. Fundamentos de matemática elementar, 2: logaritmos. 10. ed. São Paulo: Atual, 2013.

LIMA, Elon Lages. *A Matemática do Ensino Médio*, v. 1. 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2023.

LIMA, Soleny Canuto de; LOPES, Thiago Beirigo; VIEIRA, Suellen Aparecida Greatti. EPISTEMOLOGIA DA MODELAGEM MATEMÁTICA E IMPRESSÃO 3D NO ENSINO DE GEOMETRIA. REAMEC - Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática, Cuiabá, v. 12, p. e24042, 2024.

DOI: [10.26571/reamec.v12.17920](https://doi.org/10.26571/reamec.v12.17920). Disponível

em: <https://periodicoscientificos.ufmt.br/ojs/index.php/reamec/article/view/17920>.

Acesso em: 2 fev. 2026

NEGRELLI, M. A.; CIFUENTES, J. C. Aspectos epistemológicos da modelagem matemática na educação matemática. *BOLEMA – Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro, v. 27, n. 45, p. 1–20, 2013. Disponível em: < [https://www.sbemrasil.org.br/files/XIENEM/pdf/2605\\_1707\\_ID.pdf](https://www.sbemrasil.org.br/files/XIENEM/pdf/2605_1707_ID.pdf) >. Acesso em: 2 fev. 2026.

PARANÁ. GOVERNO DO PARANÁ. SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO DO PARANÁ. Diretrizes Curriculares da Educação Básica: Matemática. 2008. Disponível em: [https://www.educacao.pr.gov.br/sites/default/arquivos\\_restritos/files/documento/2019-12/dce\\_mat.pdf](https://www.educacao.pr.gov.br/sites/default/arquivos_restritos/files/documento/2019-12/dce_mat.pdf) . Acesso em: 08 fev. 2026.

SANTOS, Lucas Matias dos; SCHUEROFF, Bianca; SILVA, Parmenas Ferro da; FERREIRA, Patrick; VIDOTTI, Daniela Barbieri. Do Meme à Lenda do Xadrez: Modelagem Matemática em situações de crescimento exponencial. *Monumenta - Revista Científica Multidisciplinar*, [S. l.], v. 12, n. 12, p. 1–6, 2025. DOI: 10.57077/monumenta.v12i12.314. Disponível em: <https://revistaunibf.emnuvens.com.br/monumenta/article/view/314>. Acesso em: 29 jan. 2026.

SANTOS, Maurinete Costa dos; ASSIS, Raul Abreu de; ASSIS, Luciana Mafalda Elias de. MODELAGEM MATEMÁTICA E O ENSINO DE FUNÇÕES: UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO MÉDIO. *RECET - Revista de Ciências Exatas e Tecnológicas*, [S. l.], v. 1, p. e012401, 2024. DOI: [10.30681/recet.v1i.11721](https://doi.org/10.30681/recet.v1i.11721). Disponível em: <https://periodicos.unemat.br/index.php/recet/article/view/11721>. Acesso em: 2 fev. 2026.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez; MILANI, Estela. *Cadernos do mathema: jogos de matemática*. Porto Alegre, RS: Artemed, 2007

SOUSA, Francilino Paulo de et al. MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA: ATIVIDADES PRÁTICAS PARA UMA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA. *ARACÊ*, [S. l.], v. 7, n. 6, p. 31609–31625, 2025. DOI: [10.56238/arev7n6-142](https://doi.org/10.56238/arev7n6-142). Disponível em: <https://periodicos.newsciencepubl.com/arace/article/view/5838>. Acesso em: 29 jan. 2026.

TAHAN, Malba. *O homem que calculava – 1ª ed.* – Rio de Janeiro: Record, 2023.