

## MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADA AO DESEMPENHO ESTRUTURAL DE TORRES METÁLICAS ESTAIADAS SOB AÇÃO EÓLICA

### MATHEMATICAL MODELING APPLIED TO THE STRUCTURAL PERFORMANCE OF GUYED STEEL TOWERS UNDER WIND LOADING

### MODELADO MATEMÁTICO APLICADO AL DESEMPEÑO ESTRUCTURAL DE TORRES METÁLICAS ARRIOSTRADAS BAJO ACCIÓN EÓLICA

**Francisco Arlon de Oliveira Chaves**  
Mestre, IFPI, Brasil  
E-mail: [arlonoliv@hotmail.com](mailto:arlonoliv@hotmail.com)

**Evandro de Carvalho Ribeiro**  
Mestre, UnB, Brasil  
E-mail: [eng.prof.evandro@gmail.com](mailto:eng.prof.evandro@gmail.com)

**Francisca das Chagas Oliveira**  
Doutoranda, UFCG, Brasil  
E-mail: [engenheira.franoliv@gmail.com](mailto:engenheira.franoliv@gmail.com)

**Andreson de França Almeida**  
IFPI, Brasil  
E-mail: [andresonalmeida@ifpi.edu.br](mailto:andresonalmeida@ifpi.edu.br)

**Eugenia Maria dos Santos Cordeiro**  
Especialista, UESPI, Brasil  
E-mail: [emscordeiro81@gmail.com](mailto:emscordeiro81@gmail.com)

#### Resumo

Este trabalho apresenta um estudo numérico aplicado à análise do desempenho estrutural de torres metálicas estaiadas de seção transversal quadrada, com alturas de 10 m e 30 m, utilizadas em sistemas de telecomunicações e submetidas à ação estática do vento. As ações eólicas foram determinadas conforme os procedimentos estabelecidos pela Norma Brasileira ABNT NBR 6123, considerando a incidência perpendicular do vento em relação à face da torre, além das ações de peso próprio e do pré-tensionamento dos cabos. Para a modelagem estrutural, foram empregadas formulações matemáticas lineares e não lineares aplicadas a elementos finitos de dois nós, capazes de representar o comportamento axial dos cabos tensionados, incluindo efeitos de pré-tensionamento e variação térmica. O equilíbrio estático do sistema foi obtido por meio da minimização da função Energia Potencial Total, utilizando algoritmo iterativo do tipo Quasi-Newton. As análises computacionais foram realizadas por meio de programas desenvolvidos por Menin, sendo os resultados comparados com aqueles obtidos no software comercial SAP2000, com o objetivo de avaliar a consistência e a confiabilidade das formulações implementadas. Os resultados demonstraram elevada concordância entre os modelos analisados, apresentando diferenças reduzidas nos deslocamentos, esforços axiais e reações de apoio, evidenciando a adequação das

formulações empregadas para a análise estática de torres metálicas estaiadas submetidas à ação do vento.

**Palavras-chave:** Torres metálicas estaiadas; Ação estática do vento; Modelagem matemática; Elementos finitos; Cabos tensionados; SAP2000.

## Abstract

This study presents a numerical analysis applied to the structural performance of guyed steel towers with square cross-sections, measuring 10 m and 30 m in height, used in telecommunication systems and subjected to static wind loading. Wind actions were determined according to the procedures established by the Brazilian Standard ABNT NBR 6123, considering wind incidence perpendicular to the tower face, in addition to self-weight and cable prestressing effects. For the structural modeling, linear and nonlinear mathematical formulations applied to two-node finite elements were employed to represent the axial behavior of tensioned cables, including prestressing and thermal variation effects. The static equilibrium configuration of the system was obtained through the minimization of the Total Potential Energy function using a Quasi-Newton iterative algorithm. The computational analyses were carried out using programs developed by Menin, and the results were compared with those obtained from the commercial software SAP2000 in order to evaluate the consistency and reliability of the implemented formulations. The results demonstrated strong agreement between the analyzed models, presenting reduced differences in displacements, axial forces, and support reactions, thus confirming the adequacy of the employed formulations for the static analysis of guyed steel towers subjected to wind loading.

**Keywords:** Guyed steel towers; Static wind loading; Mathematical modeling; Finite elements; Tensioned cables; SAP2000.

## Resumen

Este trabajo presenta un estudio numérico aplicado al análisis del desempeño estructural de torres metálicas atirantadas de sección transversal cuadrada, con alturas de 10 m y 30 m, utilizadas en sistemas de telecomunicaciones y sometidas a la acción estática del viento. Las acciones eólicas fueron determinadas conforme a los procedimientos establecidos por la Norma Brasileña ABNT NBR 6123, considerando la incidencia perpendicular del viento con relación a la cara de la torre, además de las acciones de peso propio y del pretensado de los cables. Para el modelado estructural, se emplearon formulaciones matemáticas lineales y no lineales aplicadas a elementos finitos de dos nodos, capaces de representar el comportamiento axial de los cables tensionados, incluyendo efectos de pretensado y variación térmica. El equilibrio estático del sistema fue obtenido mediante la minimización de la función de Energía Potencial Total, utilizando un algoritmo iterativo del tipo Quasi-Newton. Los análisis computacionales fueron realizados mediante programas desarrollados por Menin, y los resultados fueron comparados con aquellos obtenidos en el software comercial SAP2000, con el objetivo de evaluar la consistencia y confiabilidad de las

formulaciones implementadas. Los resultados demostraron una elevada concordancia entre los modelos analizados, presentando diferencias reducidas en desplazamientos, esfuerzos axiales y reacciones de apoyo, evidenciando la adecuación de las formulaciones empleadas para el análisis estático de torres metálicas atirantadas sometidas a la acción del viento.

**Palabras clave:** Torres metálicas atirantadas; Acción estática del viento; Modelado matemático; Elementos finitos; Cables tensionados; SAP2000.

## 1 INTRODUÇÃO

As torres metálicas estaiadas constituem estruturas amplamente empregadas em sistemas de telecomunicações, transmissão de dados, radiodifusão e monitoramento, destacando-se por apresentarem elevada esbeltez, baixo peso próprio e significativa eficiência estrutural. Entretanto, devido à reduzida rigidez global e à elevada flexibilidade dos elementos que compõem o sistema estrutural, essas estruturas tornam-se particularmente sensíveis às ações do vento, sendo o carregamento eólico um dos principais fatores condicionantes do dimensionamento e da estabilidade estrutural.

O comportamento mecânico de torres estaiadas envolve uma interação complexa entre mastro principal, cabos de estaiamento e sistemas de ancoragem, tornando a modelagem matemática dessas estruturas um problema relevante na engenharia estrutural computacional. Além disso, fatores como pré-tensionamento dos cabos, não linearidade geométrica, deslocamentos excessivos e redistribuição de esforços podem influenciar significativamente a resposta estrutural do sistema, exigindo modelos numéricos capazes de representar adequadamente tais efeitos.

Nas últimas décadas, diversos estudos têm investigado o comportamento estrutural de torres metálicas submetidas à ação do vento, com enfoque em modelagem numérica, estabilidade, análise não linear e validação computacional. Contudo, parte significativa desses trabalhos concentra-se em formulações teóricas clássicas ou em análises realizadas exclusivamente por softwares comerciais, havendo ainda a necessidade de estudos que avaliem a consistência e a aplicabilidade de formulações matemáticas implementadas em programas computacionais acadêmicos, especialmente para torres de pequeno e médio porte submetidas à ação estática do vento.

Nesse contexto, a presente pesquisa busca contribuir para a análise computacional de torres metálicas estaiadas por meio da aplicação de formulações matemáticas lineares e não

lineares para elementos de cabo tensionado, considerando efeitos de pré-tensionamento e variação térmica. O estudo utiliza elementos finitos retos de dois nós, admitindo comportamento linear elástico dos materiais e rigidez axial nos elementos de barra e cabo.

A principal contribuição deste trabalho consiste na avaliação comparativa entre resultados obtidos por programas computacionais desenvolvidos por Menin e aqueles fornecidos pelo software comercial SAP2000, amplamente utilizado em análises estruturais. Busca-se, assim, verificar a coerência numérica e a aplicabilidade das formulações implementadas na representação do comportamento estático de torres estaiadas submetidas à ação eólica.

Para isso, foram analisadas torres metálicas estaiadas de seção transversal quadrada, com alturas de 10 m e 30 m, submetidas às ações estáticas do vento conforme os procedimentos estabelecidos pela ABNT NBR 6123:2023. As análises consideraram deslocamentos estruturais, esforços axiais e reações de apoio, permitindo avaliar a consistência dos modelos numéricos empregados e sua adequação para aplicações em engenharia estrutural.

## 2 MODELO NÃO-LINEAR PARA CABO TENSIONADO

### 2.1 Deformação longitudinal

Na Figura 1, a configuração indeformada de um elemento de cabo é representada pelo segmento AB, o tensionamento pelo segmento BC e o efeito térmico por BD, de modo que o cabo indeformado, após sofrer o efeito térmico, é representado pelo segmento AD. A configuração deformada do elemento, após sofrer o efeito dos carregamentos nodais externos, é representada pelo segmento A'C'. Os deslocamentos nodais AA' e CC' são indicados pelos vetores  $p$  e  $q$  – respectivamente.

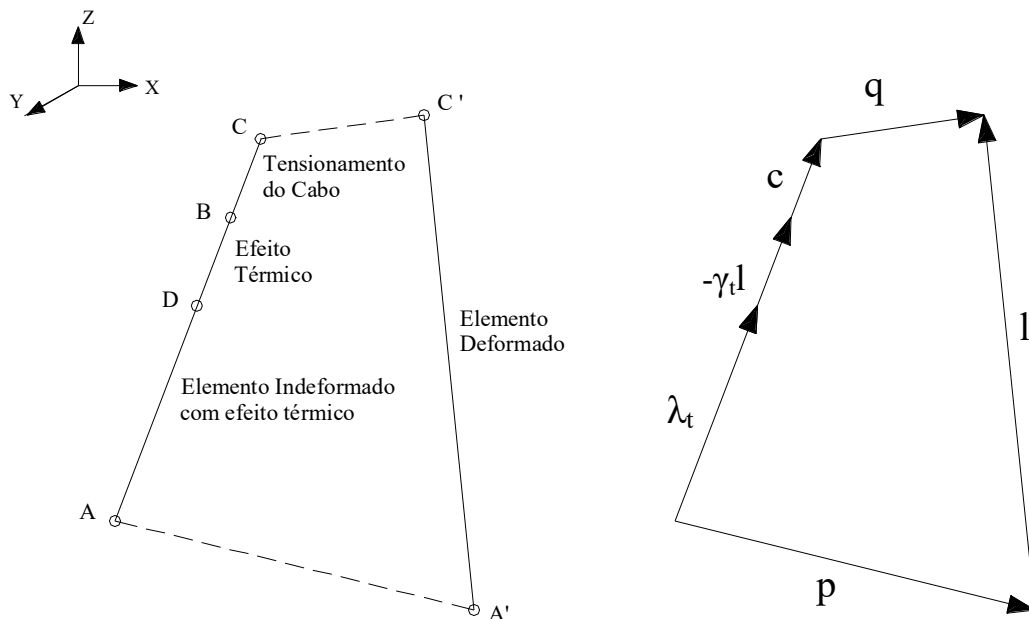


Figura 1 – Modelo não-linear de elemento de cabo e representação vetorial

onde:

$\lambda_c$  : vetor que representa a distância entre os nós (segmento AC);

$l$  : vetor que representa o comprimento inicial do cabo (segmento AB);

$\gamma_t l = \alpha \Delta T l$  : efeito térmico;  $\Delta T$  a variação de temperatura;

$\lambda_t$  : vetor que representa a configuração indeformada com efeito térmico;

$l'$  : vetor com a configuração deformada;

$p, q$  : deslocamentos nodais nas extremidades inicial e final;

$\mu = \|c\|$  : módulo do vetor  $c$ ;

$\mu_t = \|\gamma_t l\|$  : módulo do vetor  $\gamma_t l$ .

Podemos verificar a partir da Figura 1 que:

$$p + l' = \lambda_t - \gamma_t l + c + q \quad (1)$$

$$l' = \lambda_t - \gamma_t l + c + q - p \quad (2)$$

Fazendo:

$$z = q - p + c - \gamma_t l \quad (3)$$

Tem-se:

$$l' = \lambda_t + z \quad (4)$$

A deformação longitudinal do elemento pode então ser dada por:

$$\varepsilon = \frac{\|l'\| - \|\lambda_t\|}{\|\lambda_t\|} \quad (5)$$

Lembrando que:

$$\|l'\| = \sqrt{(\lambda_t + z)^T (\lambda_t + z)} \quad (6)$$

$$\text{sendo } \lambda_t = (\lambda_c - c + \gamma_t l) = L_t u \Rightarrow \|\lambda_t\| = \|L_t u\| = L_t \|u\| = L_t \quad (7)$$

onde  $u$  é vetor dos cossenos diretores do elemento de cabo na configuração indeformada e  $L_t$  o comprimento indeformado do cabo com efeito térmico.

Portanto, substituindo-se (7) em (6):

$$\|l'\| = \sqrt{L_t^2 u^T u + L_t u^T z + z^T L_t u + z^T z} \quad (8)$$

Sabendo que:

$$u = (\cos \eta, \cos \gamma, \cos \xi) \quad (9)$$

Então:  $u^T u = \cos^2 \eta + \cos^2 \gamma + \cos^2 \xi = 1$  e

$$L_t u^T z = z^T L_t u \quad (10)$$

Substituindo (10) em (8):

$$\|l'\| = \sqrt{L_t^2 + 2L_t z^T u + z^T z} \quad (11)$$

Substituindo-se (7) e (11) em (5):

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{L_t^2 + 2L_t z^T u + z^T z} - L_t}{L_t} \Rightarrow \varepsilon = \sqrt{1 + L_t^{-1} z^T (2u + L_t^{-1} z)} - 1 \quad (12)$$

Fazendo:

$$\delta = L_t^{-1} z^T (2u + L_t^{-1} z) \quad (13)$$

Tem-se que a deformação longitudinal de um elemento de cabo será:

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \delta} - 1 \quad (14)$$

## 2.2 Energia Potencial Total

A energia de deformação para um elemento de cabo com deformação constante é dada por:

$$\pi = \int_V \left[ \int_0^\varepsilon \sigma(\varepsilon) d\varepsilon \right] dV \quad (15)$$

sendo  $\sigma(\varepsilon)$  a tensão no elemento de cabo,  $\varepsilon$  a deformação longitudinal e  $V$  o volume do elemento de cabo.

Para um elemento de cabo com seção transversal constante ( $\alpha_c$ ) e comprimento indeformado com efeito térmico ( $L_t$ ), a energia de deformação será:

$$\pi = \alpha_c L_t \int_0^\varepsilon \sigma(\varepsilon) d\varepsilon \quad (16)$$

A Energia Potencial Total para um conjunto de  $n$  elementos de cabo é dada por:

$$\Pi(x) = \sum_{i=1}^n \pi - f^T x + \Pi_0 \quad (17)$$

onde  $\pi$  é a energia de deformação para cada elemento de cabo,  $f$  o vetor que contém as forças nodais externas,  $x$  vetor com deslocamentos nodais livres do sistema e  $\Pi_0$  a energia potencial inicial do sistema.

## 2.3 Gradiente da Energia Potencial Total

O gradiente da função Energia Potencial Total para um arranjo de  $n$  cabos tensionados é dado pela derivada em relação aos deslocamentos livres ( $x_i$ ) do sistema, assim como:

$$\nabla \Pi(x) = \frac{\partial \Pi(x)}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n \nabla \pi - f \quad (18)$$

Neste caso, é necessário calcular o gradiente de energia de deformação ( $\nabla \pi$ ) para um elemento de cabo:

$$\nabla \pi = \alpha_c L_t \nabla \int_0^\varepsilon \sigma(\varepsilon) d\varepsilon \quad (19)$$

$$\nabla \pi = \alpha_c L_t \sigma(\varepsilon) \nabla \varepsilon \quad (20)$$

O gradiente de deformação da equação (20) é dado em função dos seis graus de liberdade (três translações por nó) do elemento de cabo.

Conforme demonstrado na equação (14):

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \delta} - 1 \quad (21)$$

Consequentemente:

$$\nabla \varepsilon = \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} = \frac{1}{2} (1 + \delta)^{-1/2} \frac{\partial \delta}{\partial x_k} \quad (22)$$

Com as equações (3), (9) e (13), tem-se:

$$\delta = L_t^{-1} z^T (2u + L_t^{-1} z) = 2L_t^{-1} z^T u + L_t^{-2} z^T z$$

$$u = (\cos \eta, \cos \gamma, \cos \xi) \quad e \quad z = q - p + c - \gamma_t l$$

$$z = \{[x_4 - x_1 + (\mu - \mu_t) \cos \eta], [x_5 - x_2 + (\mu - \mu_t) \cos \gamma], [x_6 - x_3 + (\mu - \mu_t) \cos \xi]\}$$

Fazendo  $k = 1$ :

$$\frac{\partial \delta}{\partial x_1} = 2L_t^{-1} \frac{\partial}{\partial x_1} (z^T u) + L_t^{-2} \frac{\partial}{\partial x_1} (z^T z) \quad (23)$$

mas:

$$\begin{aligned} z^T u &= [x_4 - x_1 + (\mu - \mu_t) \cos \eta] \cos \eta + \\ &\quad [x_5 - x_2 + (\mu - \mu_t) \cos \gamma] \cos \gamma + \\ &\quad [x_6 - x_3 + (\mu - \mu_t) \cos \xi] \cos \xi \quad e \\ z^T z &= [x_4 - x_1 + (\mu - \mu_t) \cos \eta]^2 + \\ &\quad [x_5 - x_2 + (\mu - \mu_t) \cos \gamma]^2 + \\ &\quad [x_6 - x_3 + (\mu - \mu_t) \cos \xi]^2 \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} (z^T u) &= -\cos \eta \quad (24) \quad e \\ \frac{\partial}{\partial x_1} (z^T z) &= -2[x_4 - x_1 + (\mu - \mu_t) \cos \eta] \quad (25) \end{aligned}$$

Substituindo as equações (24) e (25) na equação (23), obtém-se:

$$\frac{\partial \delta}{\partial x_1} = -2L_t^{-1} \{ \cos \eta + L_t^{-1} [x_4 - x_1 + (\mu - \mu_t) \cos \eta] \} \quad (26)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_1} = -L_t^{-1}(1 + \delta)^{-1/2} \{ \cos \eta + L_t^{-1} [x_4 - x_1 + (\mu - \mu_t) \cos \eta] \} \quad (27)$$

Procedendo de forma análoga para  $k = 2, 3, 4, 5$  e  $6$ , obtém-se:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_2} = -L_t^{-1}(1 + \delta)^{-1/2} \{ \cos \gamma + L_t^{-1} [x_5 - x_2 + (\mu - \mu_t) \cos \gamma] \} \quad (28)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_3} = -L_t^{-1}(1 + \delta)^{-1/2} \{ \cos \xi + L_t^{-1} [x_6 - x_3 + (\mu - \mu_t) \cos \xi] \} \quad (29)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_4} = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_1} \quad (30)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_5} = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_2} \quad (31)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_6} = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_3} \quad (32)$$

O gradiente da energia de deformação ( $\nabla \pi$ ) para o elemento de cabo, considerando o material linear elástico ( $\sigma = E\varepsilon$ ), será:

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_1} = -\alpha_c E \varepsilon (1 + \delta)^{-1/2} \{ \cos \eta + L_t^{-1} [x_4 - x_1 + (\mu - \mu_t) \cos \eta] \} \quad (33)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_2} = -\alpha_c E \varepsilon (1 + \delta)^{-1/2} \{ \cos \gamma + L_t^{-1} [x_5 - x_2 + (\mu - \mu_t) \cos \gamma] \} \quad (34)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_3} = -\alpha_c E \varepsilon (1 + \delta)^{-1/2} \{ \cos \xi + L_t^{-1} [x_6 - x_3 + (\mu - \mu_t) \cos \xi] \} \quad (35)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_4} = -\frac{\partial \pi}{\partial x_1} \quad (36)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_5} = -\frac{\partial \pi}{\partial x_2} \quad (37)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_6} = -\frac{\partial \pi}{\partial x_3} \quad (38)$$

### 3 MODELO LINEAR PARA CABO TENSIONADO

#### 3.1 Deformação longitudinal

A deformação longitudinal do elemento de cabo para o modelo linear pode ser representada por:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_t} \quad (39)$$

onde  $\Delta L$  é a variação do comprimento no cabo e  $L_t$  o comprimento indeformado do cabo com efeito térmico.

As relações mostradas nas equações (3) e (4) podem ser representadas vetorialmente para o modelo linear de cabo tensionado como segue abaixo (Figura 3).

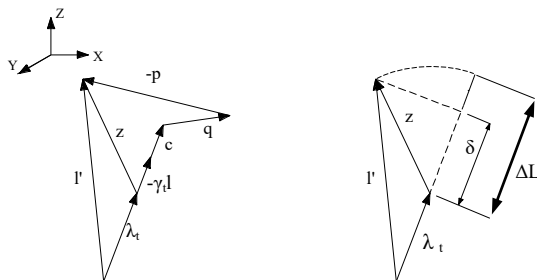


Figura 3 – Representação vetorial do modelo linear de elemento de cabo (Menin)

Por se tratar de deslocamentos e deformações infinitesimais, a variação no comprimento do cabo ( $\Delta L$ ) pode ser aproximada pela projeção ( $\delta$ ) do vetor ( $z$ ) na direção do cabo na configuração indeformada ( $\lambda_t$ ). Logo, temos:

$$\delta = z^T u \Rightarrow \varepsilon = \frac{\Delta L}{L_t} = \frac{\delta}{L_t} \quad (40)$$

### 3.2 Energia Potencial Total

Para um elemento de cabo com seção transversal constante ( $\alpha_c$ ) e comprimento ( $L_t$ ), a representação da energia potencial é da mesma forma da equação (16), obtida anteriormente do modelo não-linear.

$$\pi = \alpha_c L_t \int_0^\varepsilon \sigma(\varepsilon) d\varepsilon \quad (41)$$

### 3.3 Gradiente da Energia Potencial Total

Desta forma, o gradiente da Energia Potencial Total para um elemento de cabo é dado conforme equação (20). Então, o gradiente de deformação ( $\nabla \varepsilon$ ) pode ser dado por:

$$\nabla \varepsilon = \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} = \frac{1}{L_t} \frac{\partial \delta}{\partial x_k} \quad (42)$$

Porém, conforme demonstrado na equação (24) para  $k = 1$ , e substituindo (43) em (42), obtém-se:

$$\frac{\partial \delta}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} (z^T u) = -\cos \eta \quad (43) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_1} = -\frac{1}{L_t} \cos \eta \quad (44)$$

De forma análoga para  $k = 2, 3, 4, 5$  e  $6$ , temos:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_2} = -\frac{1}{L_t} \cos \gamma \quad (45)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_3} = -\frac{1}{L_t} \cos \xi \quad (46)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_4} = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_1} \quad (47)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_5} = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_2} \quad (48)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_6} = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_3} \quad (49)$$

O gradiente da energia de deformação ( $\nabla \pi$ ) para o elemento de cabo será:

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_1} = -\alpha_c E \varepsilon \cos \eta \quad (50)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_2} = -\alpha_c E \varepsilon \cos \gamma \quad (51)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_3} = -\alpha_c E \varepsilon \cos \xi \quad (52)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_4} = -\frac{\partial \pi}{\partial x_1} \quad (53)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_5} = -\frac{\partial \pi}{\partial x_2} \quad (54)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_6} = -\frac{\partial \pi}{\partial x_3} \quad (55)$$

## 4 METODOLOGIA COMPUTACIONAL

### 4.1 Modelagem Estrutural

As torres metálicas estaiadas analisadas neste estudo possuem seção transversal quadrada e alturas de 10 m e 30 m, sendo compostas por elementos treliçados metálicos e sistemas de estaiamento distribuídos ao longo da altura da estrutura. A modelagem estrutural foi realizada considerando comportamento linear elástico dos materiais e pequenas deformações para os elementos de barra, admitindo-se rigidez exclusivamente axial nos elementos de treliça e nos cabos.

Os montantes e diagonais da estrutura principal foram representados por elementos finitos retos de dois nós, enquanto os estais foram modelados como elementos de cabo tensionado, capazes de representar efeitos de pré-tensionamento e deformação axial. Os cabos utilizados são do tipo EHS (Extra High Strength), compostos por sete fios de aço galvanizado de elevada resistência mecânica.

A discretização estrutural foi realizada por meio de malha nodal tridimensional, composta por elementos lineares conectados nos nós da estrutura principal e dos sistemas de ancoragem. Os programas computacionais empregados utilizam formulações matemáticas lineares e não lineares implementadas para elementos finitos de dois nós, permitindo a obtenção da posição de equilíbrio estático do sistema por meio da minimização da função Energia Potencial Total.

As forças decorrentes da incidência do vento em uma estrutura, comumente conhecidas por forças aerodinâmicas, produzem uma componente horizontal na direção do vento chamada força de arrasto –  $F_a$ , calculada conforme a equação:  $F_a = C_a q A$ , onde  $C_a$  é o coeficiente de arrasto (parâmetro aerodinâmico),  $q$  a pressão dinâmica do vento (parâmetro meteorológico) e  $A$  a área da superfície de referência (parâmetro geométrico).

Conforme a norma NBR6123:2023, o coeficiente de arrasto ( $C_a$ ) em torres reticuladas de seção quadrada varia de acordo com o índice de área exposta  $\varphi$ . Este índice é definido como sendo a relação entre a área frontal efetiva de uma das faces da treliça e a área total correspondente à superfície limitada pelo contorno da treliça. É importante

ressaltar que o coeficiente de arrasto ( $C_a$ ) não é constante ao longo da torre, pois o seu valor é calculado individualmente para cada um dos módulos em função do índice de área exposta ( $\varphi$ ) do respectivo módulo.

O parâmetro meteorológico ( $q$ ) representa a variação da pressão dinâmica do vento em relação ao perfil de velocidades médias. A força de arrasto ( $F_a$ ) pode ser determinada considerando o perfil contínuo de velocidades, ou, com boa aproximação, a partir de um perfil escalonado, conforme Blessmann.

A força de arrasto ( $F_a$ ) é calculada para um diferencial ( $df$ ) do perfil contínuo e integrada dentro do limite desejado. Admite-se inicialmente uma edificação com faces cheia corrigida posteriormente em função do índice de área exposta  $-\varphi$ . Conforme o perfil contínuo da Figura 4, a força de arrasto para uma faixa de largura  $l_1(z)$  e altura  $dz$  é dada por:

$$dfa = Caq(z)l_1(z)dz \quad (56)$$

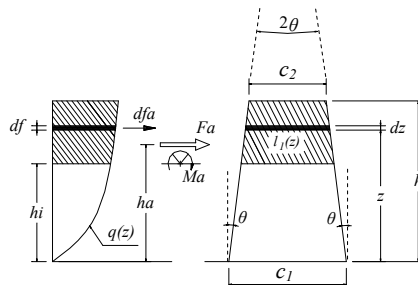


Figura 4 – Força de arrasto a partir do perfil contínuo (Blessmann [2])

A força de arrasto parcial entre o topo da edificação ( $h$ ) e o nível inferior ( $hi$ ), será:

$$F_a = \int_{hi}^h dfa \quad \text{ou} \quad F_a = Ca \int_{hi}^h q(z) l_1(z) dz \quad (57)$$

resultando em:

$$F_a = K_2 \Rightarrow Ca \Rightarrow \left[ \frac{c_1}{2p+1} (h^{2p+1} - hi^{2p+1}) - \frac{2 \pm tg\theta}{2p+2} (h^{2p+2} - hi^{2p+2}) \right] \varphi \quad (58)$$

A distância ( $h_a$ ) entre o ponto de aplicação da resultante e a base é dada por:

$$Fa \cdot h_a = \int_{h_i}^h z \, dfa \quad (59)$$

resultando em:

$$h_a = \frac{\frac{c_1}{2p+2} (h^{2p+2} - h_i^{2p+2}) - \frac{2 \, tg\theta}{2p+3} (h^{2p+3} - h_i^{2p+3})}{\frac{c_1}{2p+1} (h^{2p+1} - h_i^{2p+1}) - \frac{2 \, tg\theta}{2p+2} (h^{2p+2} - h_i^{2p+2})} \quad (60)$$

Para o caso de torres metálicas estaiadas de seção transversal quadrada submetidas a uma carga do vento incidindo com um ângulo ( $\alpha$ ) igual a  $0^\circ$  em relação à perpendicular à face de barlavento, as decomposições horizontal e vertical da força de arrasto ( $F_a$ ) são apresentadas na NBR6123:2023 e esquematizadas conforme Figura 5.

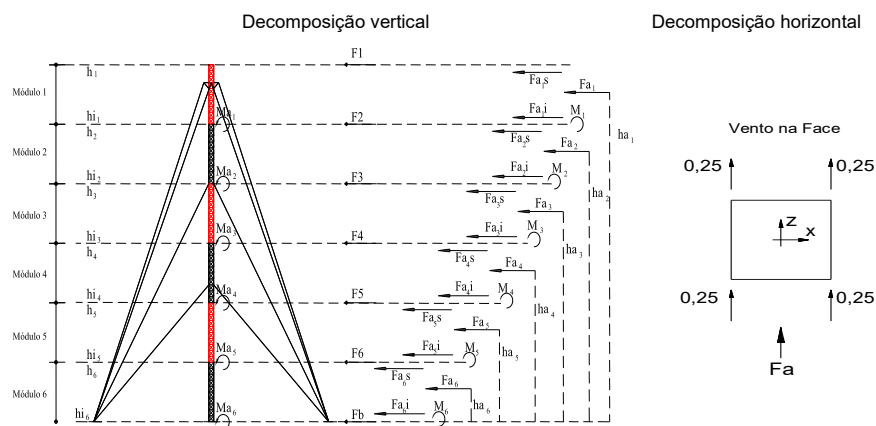


Figura 5 – Decomposições vertical e horizontal para as forças de arrasto ( $F_a$ )

## 4.2 Propriedades dos Materiais e Elementos

Para os elementos estruturais metálicos, adotou-se módulo de elasticidade longitudinal compatível com aço estrutural, considerando comportamento isotrópico e linear elástico. Os cabos de estaiamento foram modelados com propriedades equivalentes aos cabos EHS utilizados em torres de telecomunicações, incluindo rigidez axial e introdução de forças de pré-tensionamento iniciais.

As propriedades geométricas dos elementos, incluindo área transversal, comprimento e orientação espacial, foram definidas conforme a geometria estrutural de cada torre analisada. O sistema estrutural foi considerado perfeitamente articulado nos nós das treliças, admitindo transmissão apenas de esforços axiais.

#### 4.3 Carregamentos e Condições de Contorno

As ações do vento foram determinadas conforme os procedimentos estabelecidos pela ABNT NBR 6123:2023, considerando incidência perpendicular à face da torre ( $0^\circ$ ), conforme adotado nesta pesquisa. Foram considerados os efeitos do peso próprio da estrutura, das forças de pré-tensionamento dos cabos e das ações estáticas equivalentes do vento aplicadas ao longo da altura da torre.

As condições de contorno foram definidas admitindo-se engastamento na base da estrutura principal e restrições de deslocamento nos pontos de ancoragem dos cabos. Os carregamentos nodais equivalentes foram aplicados nos nós da estrutura, conforme a discretização adotada nos modelos computacionais.

Embora a ABNT NBR 6123:2023 recomende também a análise para incidência de vento a  $45^\circ$  em torres de seção quadrada, o presente estudo restringiu-se à incidência de  $0^\circ$ , visando a avaliação comparativa inicial entre os modelos computacionais empregados. Essa simplificação constitui uma limitação da presente pesquisa e deve ser considerada na interpretação dos resultados.

#### 4.4 Formulação Numérica e Processo Iterativo

A formulação matemática empregada baseia-se na obtenção da função Energia Potencial Total do sistema estrutural, cuja minimização conduz à configuração de equilíbrio estático

da estrutura. Para a solução do problema não linear, utilizou-se algoritmo iterativo do tipo Quasi-Newton, aplicado aos graus de liberdade livres do sistema estrutural.

Os modelos matemáticos implementados permitem considerar:

- deformação axial dos cabos;
- efeitos de pré-tensionamento;
- variação térmica;
- não linearidade geométrica associada aos elementos de cabo tensionado.

O processo iterativo foi conduzido até a convergência numérica dos deslocamentos nodais e das forças internas do sistema, garantindo estabilidade da solução obtida.

#### 4.5 Validação Computacional

Com o objetivo de avaliar a consistência das formulações implementadas, os resultados obtidos pelos programas computacionais desenvolvidos por Menin foram comparados com aqueles fornecidos pelo software comercial SAP2000, amplamente utilizado em análises estruturais de engenharia.

Para garantir equivalência entre os modelos analisados, foram adotadas as mesmas propriedades geométricas, propriedades mecânicas, carregamentos, condições de contorno e níveis de pré-tensionamento nos dois ambientes computacionais. As comparações foram realizadas com base nos deslocamentos máximos, esforços axiais e reações de apoio das torres analisadas.

A análise comparativa permitiu verificar a coerência numérica entre os modelos implementados e o software comercial de referência, fornecendo suporte para validação das formulações matemáticas empregadas nesta pesquisa.

#### 5 APLICAÇÕES E RESULTADOS

Esta seção apresenta os resultados da análise estática realizada para as torres estaiadas de 10 e 30 metros de altura. Os resultados foram obtidos através do programa de análise estática (AETEQ), desenvolvidos por Menin. O programa computacional AETEQ

utiliza o modelo linear para cabo tensionado. Os resultados foram avaliados em termos de deslocamento máximo de topo, reações de apoio e de ancoragem de cabos.

Os resultados obtidos nas análises numéricas permitiram avaliar o comportamento estrutural das torres metálicas estaiadas de 10 m e 30 m submetidas à ação estática do vento, bem como verificar a consistência das formulações implementadas nos programas computacionais desenvolvidos por Menin em comparação com o software comercial SAP2000.

As comparações foram realizadas com base nos deslocamentos máximos da estrutura, esforços axiais nos elementos principais e reações de apoio nas ancoragens dos estais. Para melhor interpretação dos resultados, foi calculado o erro relativo percentual entre os valores obtidos pelos modelos computacionais, conforme a Equação (52):

$$Erro(\%) = \frac{|Valor_{AETEQ} - valor_{SAP2000}|}{Valor_{SAP2000}} \times 100$$

Os resultados mostraram elevada proximidade entre os valores obtidos pelos programas analisados, com diferenças percentuais inferiores a 1% para a maior parte das grandezas avaliadas. Essa proximidade indica coerência numérica entre as formulações implementadas e o modelo de referência utilizado no SAP2000, evidenciando a adequada representação do comportamento estrutural das torres estaiadas submetidas à ação do vento.

Observou-se que a torre de 30 m apresentou deslocamentos significativamente superiores aos verificados na torre de 10 m, comportamento esperado devido ao aumento da esbeltez estrutural e da flexibilidade global do sistema. Estruturas mais altas tendem a apresentar maior sensibilidade às ações laterais do vento, resultando em maiores deslocamentos horizontais e redistribuição mais intensa dos esforços internos nos elementos estruturais e nos cabos de estaiamento.

Os maiores esforços axiais concentraram-se nos montantes principais e nos cabos diretamente alinhados à direção de incidência do vento, demonstrando a forte influência do carregamento eólico na redistribuição das forças internas do sistema estrutural. Esse comportamento está associado à transferência dos esforços laterais para os estais, responsáveis por garantir estabilidade global e limitar os deslocamentos da torre.

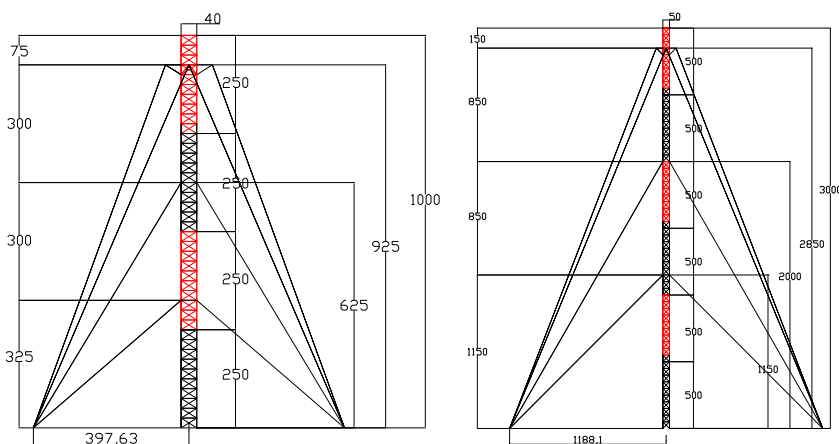
As reações de apoio obtidas nas ancoragens apresentaram comportamento compatível com a configuração geométrica e com o sistema de pré-tensionamento adotado. Observou-se aumento das forças de tração nos cabos posicionados na direção oposta à incidência do vento, enquanto os cabos voltados para a direção da ação eólica apresentaram redução relativa das tensões iniciais, comportamento típico de estruturas estaiadas submetidas a carregamentos laterais.

As pequenas diferenças observadas entre os resultados do AETEQ e do SAP2000 podem estar relacionadas às particularidades numéricas de cada ambiente computacional, incluindo critérios internos de discretização, tolerâncias iterativas, estratégias de convergência e implementação das formulações de elementos finitos. Ainda assim, os desvios reduzidos obtidos demonstram consistência satisfatória entre os modelos analisados.

Embora o presente estudo tenha considerado apenas carregamento estático com incidência do vento a  $0^\circ$ , os resultados evidenciam que as formulações matemáticas implementadas apresentam capacidade adequada para representar o comportamento global de torres metálicas estaiadas submetidas à ação eólica. Entretanto, ressalta-se que análises futuras envolvendo incidência do vento a  $45^\circ$ , efeitos dinâmicos e não linearidade geométrica mais pronunciada poderão fornecer avaliação estrutural ainda mais representativa das condições reais de operação.

Na análise estática das torres estaiadas, a simulação do carregamento do vento foi determinada a partir dos parâmetros definidos na NBR6123:2023, entre eles: velocidade básica do vento igual a 45m/s; fator topográfico  $S_T$  igual a 1,0 e o fator estatístico  $S_3$ , para o caso de torres de telecomunicações, é considerado igual a 1,1. As variações de temperatura ( $\Delta T$ ) nos elementos de cabo e barra das torres estaiadas não foram consideradas nesta análise. No programa AETEQ, apesar das exigências da norma NBR6123:2023 para a consideração da ação estática do vento com ângulos de incidência ( $\alpha$ ) iguais a  $0^\circ$  e  $45^\circ$  da face de barlavento da torre, ressalta-se que neste trabalho foi adotado somente o ângulo de incidência igual a  $0^\circ$  (carregamento perpendicular a uma das faces).

As dimensões geométricas das torres estaiadas de 10 e de 30 metros e suas respectivas silhuetas são apresentadas na Figura 9.



**Figura 9 – Torres estaiadas de 10 e de 30 metros (sem escala)**

A tabela 2 apresenta inicialmente um resumo dos deslocamentos na direção do carregamento do vento tomando como referência os quatro nós situados no topo das torres estaiadas. Para a análise estática linear, as cargas atuantes nestas estruturas foram: peso próprio (PP), tensionamento dos cabos (DEF) e o carregamento do vento (CV), sendo consideradas como cargas nominais. Ainda na mesma tabela, é apresentada uma comparação dos deslocamentos nodais, obtidos através do programa AETEQ, com os do programa SAP2000.

*Tabela 2 – Comparação entre deslocamentos nodais no topo das torres estaiadas*

Nó	Deslocamentos nodais de topo (cm)			
	10m		30m	
	AETEQ	SAP	AETEQ	SAP
1	0,4356	0,4406	2,6830	2,6848
2	0,4399	0,4448	2,6889	2,6905
3	0,4403	0,4449	2,6897	2,6906
4	0,4353	0,4400	2,6822	2,6834

Da tabela 2, observa-se que os valores dos deslocamentos dos nós de topo não apresentaram diferenças significativas entre os programas AETEQ e SAP2000 utilizados para esta análise. A variação de resultados entre os dois programas não ultrapassou 1%, mostrando-se satisfatória.

Devido ao grande número de elementos de barra das torres estaiadas, na tabela 3 são apresentados somente os esforços axiais máximos para os montantes (M) localizados na base destas estruturas.

*Tabela 3 – Esforços axiais nos montantes da base das torres estaiadas*

Torre Estaiada	Montantes base	AETEQ	SAP2000	Diferença
		Esforço (kN)	Esforço (kN)	
10m	481	-6,09751	-6,07767	0,33%
	482	-6,44483	-6,39315	0,81%
	483	-13,23699	-13,26850	0,24%
	484	-12,92826	-12,92379	0,03%
30m	725	-4,37667	-4,35033	0,61%
	726	-6,01792	-5,99745	0,34%
	727	-35,28692	-35,33454	0,13%
	728	-33,64566	-33,64946	0,01%

Os resultados referentes às reações de apoio na base das torres estaiadas de 10 e de 30 metros de altura, incluindo também os pontos de ancoragem de cabos, são apresentados na tabela 4. Os resultados das reações de apoio foram obtidos do programa de análise estática AETEQ e posteriormente comparados às do SAP2000. Da tabela 4, os quatros primeiros nós correspondem sempre aos nós de extremidade inferior dos montantes, os demais correspondem aos pontos de ancoragem de cabos. As reações de apoio referentes aos eixos ortogonais  $x$  e  $z$  definem o plano horizontal, onde o eixo  $z$  compreende a direção do carregamento de vento e  $y$  o eixo vertical da estrutura.

*Tabela 4 – Comparação entre reações de apoio dos programas AETEQ e SAP2000*

Nó	Torre Estaiada de 30m					
	AETEQ (kN)			SAP2000 (kN)		
	RX	RY	RZ	RX	RY	RZ
241	0,0000	4,3934	0,0000	0,0056	4,3595	0,0000
242	0,0000	4,3738	-1,6769	0,0000	4,3212	-1,6799
243	0,0000	35,3137	0,0000	0,0026	35,3487	0,0000
244	0,0000	35,3334	-1,6769	0,0000	35,3459	-1,6797
249	-14,9159	-25,8013	-14,9257	-14,9120	-25,7968	-14,9218
250	14,9159	-25,8013	-14,9257	14,9090	-25,7972	-14,9189
251	5,3250	-10,4245	5,3152	5,3100	-10,3918	5,3002
252	-5,3348	-10,4245	5,3250	-5,3153	-10,3929	5,3056

Nó	Torre Estaiada de 10m					
	AETEQ (kN)			SAP2000 (kN)		
	RX	RY	RZ	RX	RY	RZ
161	0,0000	6,0997	0,0000	-0,0008	6,0788	0,0000
162	0,0000	6,1193	-0,5099	0,0000	6,0748	-0,5119
163	0,0000	13,2390	0,0000	0,0026	13,2685	0,0000
164	0,0000	13,2194	-0,5001	0,0000	13,2404	-0,5042
169	-6,4037	-11,0129	-6,4135	-6,4124	-11,0233	-6,4200
170	6,4037	-11,0129	-6,4135	6,4135	-11,0258	-6,4207
171	4,2463	-7,4334	4,2365	4,2276	-7,4142	4,2202
172	-4,2463	-7,4334	4,2365	-4,2308	-7,4155	4,2233

Verifica-se que, na comparação dos valores gerados pelo programa AETEQ e pelo programa SAP2000, a diferença entre reações de apoio permaneceu, na maioria dos casos, menor que 1%. Deste modo, pode-se concluir que existe uma boa correlação entre os resultados obtidos pelos programas AETEQ e SAP2000.

## 6 CONCLUSÕES

O presente estudo apresentou uma análise numérica aplicada ao desempenho estrutural de torres metálicas estaiadas de seção transversal quadrada, com alturas de 10 m e 30 m, submetidas à ação estática do vento conforme os procedimentos estabelecidos pela ABNT NBR 6123. A pesquisa foi desenvolvida com base em formulações matemáticas lineares e não lineares aplicadas a elementos finitos de dois nós, capazes de representar o comportamento axial de cabos tensionados, incluindo efeitos de pré-tensionamento e variação térmica.

Os resultados obtidos demonstraram elevada concordância entre os programas computacionais desenvolvidos por Menin e o software comercial SAP2000, apresentando diferenças reduzidas nos deslocamentos estruturais, esforços axiais e reações de apoio. Os erros percentuais inferiores a 1% indicaram consistência numérica satisfatória entre os modelos analisados, evidenciando a confiabilidade das formulações implementadas para aplicações em análise estática de torres metálicas estaiadas.

As análises realizadas permitiram observar a influência da altura da estrutura na resposta global do sistema, verificando-se aumento significativo dos deslocamentos laterais e maior sensibilidade estrutural ao carregamento eólico nas torres mais esbeltas. Além disso, constatou-se a importância do sistema de estaiamento na redistribuição dos esforços internos e na estabilização global da estrutura submetida à ação do vento.

Do ponto de vista científico, o trabalho contribui para a validação computacional de formulações matemáticas aplicadas à modelagem de torres metálicas estaiadas, especialmente no contexto de programas acadêmicos de análise estrutural comparados a softwares comerciais amplamente utilizados na engenharia. A pesquisa também reforça a aplicabilidade de modelos simplificados baseados em rigidez axial para representação preliminar do comportamento estrutural dessas estruturas.

Entretanto, algumas limitações devem ser destacadas. O estudo restringiu-se à análise estática do vento com incidência perpendicular à face da torre ( $0^\circ$ ), não contemplando análises para incidência a  $45^\circ$ , efeitos dinâmicos do vento, vibração estrutural, não linearidade geométrica avançada ou análises probabilísticas de carregamento. Além disso, os parâmetros normativos utilizados foram baseados na ABNT NBR 6123:1988, em razão da compatibilidade metodológica com os programas computacionais empregados.

Como continuidade da pesquisa, recomenda-se o desenvolvimento de estudos envolvendo:

- análise dinâmica das torres estaiadas;
- avaliação da resposta estrutural para diferentes ângulos de incidência do vento;
- implementação completa da formulação não linear;
- atualização dos modelos conforme a ABNT NBR 6123:2023;
- análise de sensibilidade ao pré-tensionamento dos cabos;
- simulações probabilísticas e estudos de confiabilidade estrutural.

Dessa forma, conclui-se que as formulações matemáticas e os modelos computacionais utilizados apresentaram desempenho satisfatório na representação do comportamento estático de torres metálicas estaiadas submetidas à ação eólica, constituindo ferramenta potencialmente útil para aplicações em engenharia estrutural computacional e projetos de sistemas de telecomunicações.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABUBAKAR, M.; et al. Comparative study of finite element modeling techniques for lattice telecommunication towers. *Structures*, v. 62, p. 104–118, 2024.

ALTAY, O.; et al. Numerical investigation of the collapse mechanisms of self-supporting telecommunication towers under extreme wind loading. *Structures*, v. 60, art. 105842, 2024.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS – ABNT. *NBR 6123: Forças devidas ao vento em edificações*. Rio de Janeiro, 2023. Confirmada em 2013.

BATHE, K. J. *Finite Element Procedures*. New Jersey: Prentice Hall, 1996.

BLESSMANN, J. *Introdução ao Estudo das Ações Dinâmicas do Vento*. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 1998.

BLESSMANN, J. *Forças Devidas ao Vento em Edificações Altas*. Caderno de Engenharia CE-27. Porto Alegre: CPGEC/UFRGS, 1988.

CHEN, X.; et al. Stochastic wind field simulation and dynamic response of guyed masts using advanced Monte Carlo techniques. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, v. 234, art. 105341, 2023.

COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E.; WITT, R. J. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. 4. ed. New York: John Wiley & Sons, 2002.

FU, X.; LI, H.; et al. Wind-induced vibration analysis and structural reliability assessment of guyed transmission towers. *Engineering Structures*, v. 287, art. 116098, 2023.

GERE, J. M.; WEAVER JR., W. *Análise de Estruturas Reticuladas*. Rio de Janeiro: LTC, 2003.

LOGAN, D. L. *A First Course in the Finite Element Method*. 6. ed. Stamford: Cengage Learning, 2017.

MENIN, R. C. G. *Análise Estática e Dinâmica de Torres Estaiadas*. Dissertação (Mestrado em Estruturas) — Universidade de Brasília, Brasília, 2002.

MORAES, C. S.; SILVA, A. R.; OLIVEIRA, M. T. Modelagem computacional aplicada à análise não linear de torres metálicas estaiadas submetidas ao vento. *Revista IBRACON de Estruturas e Materiais*, v. 15, n. 4, p. 1–18, 2022.

PULINO, A. R. F. *Contribuição ao Estudo das Coberturas Pênseis*. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1991.

PULINO, A. R. F. Notas de aula não publicadas. Universidade de Brasília, Brasília, 1998.  
SAP2000. *Structural Analysis Program: Advanced Analysis Reference Manual*. Version 10.0.1. Berkeley: Computers and Structures Inc., 2005.

SILVA, V. P.; PIMENTA, P. M. *Análise Não Linear de Estruturas*. São Paulo: EdUSP, 2008.

SORIANO, H. L. *Método dos Elementos Finitos em Análise de Estruturas*. São Paulo: EDUSP, 2003.

THOMAS, G. B.; WEIR, M. D.; HASS, J. *Thomas' Calculus*. 15. ed. Boston: Pearson, 2021.

TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J. M. *Theory of Elastic Stability*. 2. ed. New York: McGraw-Hill, 1961.

ZHANG, Y.; et al. Structural optimization and aerodynamic performance of steel lattice towers subjected to wind loads. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 196, art. 107421, 2022.