Revista Multidisciplinar do Nordeste Mineiro, v.13, 2025
ISSN: 2178-6925
DOI: 10.61164/rmnm.13i14202

Análise Variacional de Sistemas Elípticos com o Operador p-Laplaciano em Domínios de $\mathbb{R}^N$

Variational Analysis of Elliptic Systems with the p-Laplacian Operator in Domains of $\mathbb{R}^N$

Elson Leal de Moura
Doutorado em Matemática – Análise
Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri – UFVJM,
Teófilo Otoni/MG, Brasil
elson.moura@ufvjm.edu.br

Recebido: 26/06/2025 - **Aceito:** 27/06/2025

Resumo: Neste trabalho, investigamos a existência de soluções não triviais para um sistema elíptico definido em $\mathbb{R}^N$, envolvendo o operador p-Laplaciano. Sob hipóteses adequadas de coercividade dos potenciais e condições de regularidade e crescimento das não linearidades, demonstramos, por meio de métodos variacionais, que o funcional associado ao sistema satisfaz as condições do Teorema do Passo da Montanha, assegurando a existência de soluções fracas não triviais.

Palavras-chave: Operador p-Laplaciano, Sistemas elípticos, Existência de soluções fracas.

Abstract: In this work, we investigate the existence of nontrivial solutions for an elliptic system defined in $\mathbb{R}^N$, involving the p-Laplacian operator. Under suitable coercivity assumptions on the potentials and appropriate regularity and growth conditions on the nonlinearities, we demonstrate, through variational methods, that the functional associated with the system satisfies the conditions of the Mountain Pass Theorem, ensuring the existence of nontrivial weak solutions.

Keywords: p-Laplacian operator, Elliptic systems, Existence of weak solutions.

Revista Multidisciplinar do Nordeste Mineiro, v.13, 2025
ISSN: 2178-6925
DOI: 10.61164/rmnm.13i14202

1 Introdução

Neste artigo, estudamos a existência de soluções para o seguinte sistema elíptico envolvendo o operador p-Laplaciano, definido no espaço não limitado $\mathbb{R}^N$

$$\begin{cases} -\Delta_p u + a(x)\,|u|^{p-2} = F_u(x,u,v), \ x \in \mathbb{R}^N \\ -\Delta_q v + b(x)\,|v|^{q-2} = F_v(x,u,v), \ x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \qquad (\mathbb{S})$$

onde $1 < p, q < N$; $a, b : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ são funções contínuas satisfazendo $a(x) \geq a_0 > 0, b(x) \geq b_0 > 0, \forall x \in \mathbb{R}^N$, além de serem coercivas, isto é:

$$\lim_{|x|\to\infty} a(x) = \lim_{|x|\to\infty} b(x) = \infty.$$

Nosso objetivo é estabelecer a existência de soluções não triviais para esse sistema. Como condição natural decorrente da estrutura do problema, a origem $(u, v) = (0, 0)$ é uma solução trivial, já que assumimos $F(x, 0, 0) = F_u(x, 0, 0) = F_v(x, 0, 0) = 0$.

O presente estudo é motivado pela generalização de resultados previamente estabelecidos. Em particular, destacamos o trabalho de D. G. Costa [3] que analisou um sistema variacional semelhante no espaço de Hilbert $H^1(\mathbb{R}^N)$, , sob condições de coercividade e crescimento para os potenciais. Além disso, mencionamos o estudo de A. Djellit e S. Tas [4] que investigaram sistemas elípticos com operador p-Laplaciano e ausência de termos de potencial, utilizando a condição de compacidade de Cerami e hipóteses de não quadraticidade sobre o funcional.

Nosso enfoque recai sobre a análise variacional do sistema, com a finalidade de aplicar o Teorema do Passo da Montanha e provar a existência de soluções fracas não triviais. Para isso, impomos condições específicas sobre os potenciais e sobre a função F , assegurando a estrutura necessária ao tratamento pelo método de pontos críticos.

2 Hipóteses Variacionais

Nosso principal objetivo é demonstrar a existência de uma solução fraca não trivial para o sistema $(\mathbb{S})$, por meio da análise variacional do funcional associado. Para isso, assumimos as seguintes hipóteses sobre os potenciais e sobre a função não linear F :

(H_1) As funções $a, b : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ são contínuas e satisfazem:

$$a(x) \geq a_0 > 0, b(x) \geq b_0 > 0, \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Revista Multidisciplinar do Nordeste Mineiro, v.13, 2025
ISSN: 2178-6925
DOI: 10.61164/rmnm.13i14202

(H_2) (Coercividade) As funções a e b são coercivas, isto é:

$$\lim_{|x|\to\infty} a(x) = \lim_{|x|\to\infty} b(x) = \infty.$$

(F_1) (Regularidade) A função $F\colon \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ pertence à classe C^1 e satisfaz:

$$F(x,0,0) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

(F_2) (Crescimento controlado) Existem constantes $c_1 > 0, p_1, p_2, q_1, q_2$ tais que:

$$\begin{cases} \left|\dfrac{\partial F}{\partial u}(x,u,v)\right| \leq c_1 |u|^{p_1-1} |v|^{q_1-1} \text{ em } \mathbb{R}^N \\ \left|\dfrac{\partial F}{\partial v}(x,u,v)\right| \leq c_1 |u|^{p_2-1} |v|^{q_2-1} \text{ em } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

onde $\max\{p,q\} \leq p_i + q_i < \min\{p^*, q^*\}$ para $i = 1, 2$; e

$$p^* = \frac{Np}{N-p},\ q^* = \frac{Nq}{N-q}.$$

(F_3) (Estrutura do tipo Ambrosetti–Rabinowitz) Existe $\mu > \max\{p,q\}\cdot$

$$U \cdot \nabla F(x,U) \geq \mu \cdot F(x,U) > 0, \forall (x,U) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2.$$

Trabalharemos no contexto em que $(F_u, F_v) = \nabla F$ para $F \in C^1\left(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ e consideramos o funcional associado ao sistema $(\mathbb{S})$, definido por:

$$\mathcal{I}(u,v) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^p + a(x)|u|^p\right) dx + \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v|^p + b(x)|v|^q\right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u,v)dx,$$

para todo $(u,v) \in E_{p,q}$.

Definimos os espaços funcionais envolvidos:

(A_1) O subespaço $E_{p,q} \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times W^{1,q}(\mathbb{R}^N)$ é definido por

$$E_{p,q} = \left\{(u,v) \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times W^{1,q}(\mathbb{R}^N); \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^p + a(x)|u|^p + |\nabla v|^q + b(x)|v|^q\right) dx < \infty\right\}$$

com $1 < p, q < N$.

Revista Multidisciplinar do Nordeste Mineiro, v.13, 2025
ISSN: 2178-6925
DOI: 10.61164/rmnm.13i14202

(A_2) A norma associada ao funcional $\mathcal{I}$ é definida por :

$$\|(u,v)\|_{E_{p,q}} = \|u\|^p_{E_p} + \|v\|^q_{E_q},$$

onde

$$\|u\|^p_{E_p} = \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^p + a(x)\,|u|^p\right) dx$$

e

$$\|v\|^q_{E_q} = \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v|^q + b(x)\,|v|^q\right) dx.$$

(A_3) Com essa norma, $E_{p,q}$ é um espaço de Banach reflexivo, conforme mostrado em [1] .

3 Ferramentas Variacionais

Para demonstrar a existência de soluções não triviais para o sistema $(\mathbb{S})$, utilizamos uma abordagem baseada no Teorema do Passo da Montanha, em conjunto com a condição de compacidade de Palais–Smale. Ambas são ferramentas fundamentais no contexto dos métodos variacionais.

Apresentamos a seguir os conceitos centrais utilizados:

Definição 3.1 *(P.S.) Seja E um espaço de Banach e $\phi \in C^1(E,\mathbb{R})$. Dizemos que ϕ: $E \to \mathbb{R}$ satisfaz a condição de Palais - Smale (abreviadamente, condição (PS)) se , toda sequência (u_n, v_n) em E tal que :*

$$|\phi(u_n,v_n)| \leq C \ \ e \ \ \phi'(u_n,v_n) \to 0 \ \ em \ \ E',$$

possui uma subsequência convergente em E.

Teorema 3.2 **(Teorema do Passo da Montanha)***: Seja E um espaço de Banach e $\phi \in C^1(E,\mathbb{R})$ satisfazendo a condição (PS). Suponha que :*

1. *$\phi(0) = 0$;*

2. *Existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tais que $\phi \geq \alpha$ na fronteira da bola B_ρ;*

3. *Existe um $e \in \left(E - \overline{B}_\rho\right)$ tal que $\phi(e) \leq 0$.*

Revista Multidisciplinar do Nordeste Mineiro, v.13, 2025
ISSN: 2178-6925
DOI: 10.61164/rmnm.13i14202

Então, ϕ possui um valor crítico $c \geq \alpha$. Além disso, c pode ser caracterizado por

$$c = \inf_{g\in\Gamma} \max_{u\in g([0,1])} \phi(u)$$

onde

$$\Gamma = \{g \in C([0,1], E) : g(0) = 0,\ g(1) = e\}.$$

Demonstração : *Para uma demonstração completa, consulte Rabinowitz* [6].

Observação : Para mais informações sobre os espaços chamados de Espaços de Sobolev $E, W^{1,p}(\mathbb{R}^N), W^{1,q}(\mathbb{R}^N)$ consulte Rabinowitz [6].

4 RESULTADOS PRELIMINARES

Antes de aplicar o Teorema do Passo da Montanha, apresentamos alguns resultados auxiliares fundamentais relacionados à estrutura variacional do funcional associado ao sistema $(\mathbb{S})$.

Lema 4.1 *Se as hipóteses $(H_1), (H_2)$ são satisfeitas, então a imersão*

$$E_{p,q} \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \times L^q(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$$

é compacta.

Demonstração : *Sem perda de generalidade, suponha que $(u_n, v_n) \rightharpoonup (0, 0)$ fracamente em $E_{p,q}$. Nós desejamos mostrar que $(u_n, v_n) \to (0, 0)$ em $L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \times L^q(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Utilizando a teoria de convergência fraca, desde que $E_{p,q}$ é reflexivo, se (u_n, v_n) converge fracamente, então (u_n, v_n) é uma sequência limitada , ou seja , existe uma constante $C > 0$ tal que $\|(u_n, v_n)\|_{E_{p,q}} \leq C$, ou seja ,*

$$\|(u_n, v_n)\|_{E_{p,q}} = \|u_n\|^p_{E_p} + \|v_n\|^q_{E_q} \leq C.$$

Seja $\epsilon > 0$. Pela coercividade de $a(x)$ e $b(x)$, existe $R > 0$ tal que

$$a(x) \geq \frac{2C}{\epsilon} > 0 \quad e \quad b(x) \geq \frac{2C}{\epsilon} > 0, \ \text{para todo}\, |x| \geq R.$$

Dividimos $\mathbb{R}^N$ em duas regiões : a bola B_R centrada na origem e seu complemento B_R^C .

Por conseguinte, defina o operador Γ;

$$\begin{array}{rccc} \Gamma & : & W^{1,p}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \times W^{1,q}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) & \longrightarrow & W^{1,p}(B_R, \mathbb{R}) \times W^{1,q}(B_R, \mathbb{R}) \\ & & (u, v) & \longrightarrow & \Gamma(u, v) = (u, v). \end{array}$$

Revista Multidisciplinar do Nordeste Mineiro, v.13, 2025

ISSN: 2178-6925

DOI: 10.61164/rmnm.13i14202

Sob a condição de que o operador Γ *é contínuo, mantém-se que* $(u_n, v_n) \rightharpoonup (0,0)$ *fracamente em* $W^{1,p}(B_R,\mathbb{R}) \times W^{1,q}(B_R,\mathbb{R}) = E(B_R)$. *Empregando a teoria de imersão nos espaços de Sobolev* [2] ,

$$W^{1,p}(B_R,\mathbb{R}) \times W^{1,q}(B_R,\mathbb{R}) \hookrightarrow L^p(B_R,\mathbb{R}) \times L^q(B_R,\mathbb{R}).$$

À vista disso, dado $\epsilon > 0$, *existe um* $n_0 \in \mathbb{N}$ *de forma que , para todo* $n \geq n_0$,

$$\int_{B_R} |u_n|^p \, dx = \|u_n\|^p_{L^p(B_R)} < \frac{\epsilon}{2}$$

e

$$\int_{B_R} |v_n|^q \, dx = \|v_n\|^q_{L^q(B_R)} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Por outra perspectiva, escolhendo R *e usando a condição* (A_1),

$$\begin{aligned} \frac{2}{\epsilon}\int_{B_R^C} |u_n|^p \, dx &\leq \frac{2}{\epsilon}\int_{B_R^C} \frac{\epsilon a(x)}{2C} |u_n|^p \, dx = \frac{1}{C}\int_{B_R^C} a(x)\,|u_n|^p \, dx \\ &\leq \frac{1}{C}\int_{B_R^C} \left(|\nabla u_n|^p + a(x)\,|u_n|^p\right) dx = \frac{1}{C}\,\|u_n\|^p_{E_p} \leq 1 \end{aligned}$$

como também, de maneira símile,

$$\frac{2}{\epsilon}\int_{B_R^C} |v_n|^q \, dx \leq \frac{1}{C}\,\|v_n\|^q_{E_q} \leq 1.$$

Posto isso, obtemos as desigualdades

$$\int_{B_R^C} |u_n|^p \, dx \leq \frac{\epsilon}{2}, \quad \int_{B_R^C} |v_n|^q \, dx \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Recorrendo ao resultado de que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p \, dx = \int_{B_R} |u_n|^p \, dx + \int_{B_R^c} |u_n|^p \, dx,$$

nós obtemos a limitação

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p \, dx < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}.$$

Da mesma maneira, obtemos o mesmo resultado para a sequência (v_n).

Em conclusão, contemple que

$$\|(u_n, v_n) - (0,0)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)\times L^q(\mathbb{R}^N)} = \|u_n - 0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|v_n - 0\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} < 2\epsilon$$

e o resultado desejado é alcançado .

□

Revista Multidisciplinar do Nordeste Mineiro, v.13, 2025
ISSN: 2178-6925
DOI: 10.61164/rmnm.13i14202

Lema 4.2 *(Compacidade do operador não linear associado) Suponha válidas as hipóteses* $(H_1), (H_2)$ *e* (F_2) *. Dessarte, obtemos que a aplicação*

$$N^{'} : E_{p,q} \to E_{p,q}^{'}$$

é compacta, assente que

$$N(u,v) := \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u,v)dx.$$

Demonstração : *Nossa estratégia aqui é mostrar que dada uma sequência limitada* $(u_n, v_n) \subset E_{p,q}$*, a menos de subsequência ,* $N^{'}(u_n, v_n) \to N^{'}(u,v)$ *fortemente em* $E_{p,q}^{'}$*.*

Efetivamente, usando a definição de norma podemos verificar que

$$\begin{aligned} & \left\| N^{'}(u_n, v_n) - N^{'}(u,v) \right\| \\ = & \sup_{\|(\varphi,\psi)\| \leq 1} \left| (N^{'}(u_n, v_n) - N^{'}(u,v))(\varphi,\psi) \right| \\ \leq & \sup_{\|(\varphi,\psi)\| \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^N} \left(F_u(x,u_n,v_n) - F_u(x,u,v)\right) \varphi dx \right| \\ & + \sup_{\|(\varphi,\psi)\| \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^N} \left(F_v(x,u_n,v_n) - F_v(x,u,v)\right) \psi dx \right|. \end{aligned}$$

Pelo caráter reflexivo de $E_{p,q}$*, hipótese* (A_3)*, existe* $(u,v) \in E_{p,q}$ *tal que*

$$\begin{cases} (u_n, v_n) \rightharpoonup (u,v) \quad em \quad E_{p,q}, \\ (u_n(x), v_n(x)) \to (u(x), v(x)) \quad q.t.p \ x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Objetivando verificar que, $\forall\ (\varphi,\psi) \in E_{p,q}$*, temos*

$$\int_{\mathbb{R}^N} F_u(x,u_n,v_n)\varphi dx \to \int_{\mathbb{R}^N} F_u(x,u,v)\varphi dx, \ \ n \to \infty,$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} F_v(x,u_n,v_n)\psi dx \to \int_{\mathbb{R}^N} F_v(x,u,v)\psi dx, \ \ n \to \infty,$$

iremos apenas verificar a primeira convergencia, pois a outra segue analogamente.

Pelo Lema 4.1, podemos utilizar a imersao compacta $E_{p,q}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N) \times L^q(\mathbb{R}^N)$*. Em seguimento,*

$$(u_n, v_n) \to (u,v) \quad em \quad L^p(\mathbb{R}^N) \times L^q(\mathbb{R}^N).$$

Pela hipótese (F_1)*,* $F_u(x,u_n,v_n)$ *é contínua em* $(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$*. Isto implica que*

$$F_u(x,u_n(x),v_n(x)) \to F_u(x,u(x),v(x)) \quad q.t.p. \ em \ \mathbb{R}^N.$$

Revista Multidisciplinar do Nordeste Mineiro, v.13, 2025
ISSN: 2178-6925
DOI: 10.61164/rmnm.13i14202

Isto posto, defina a sequência

$$f_n(x) := F_u(x, u_n(x), v_n(x))\varphi(x) \to F_u(x, u(x), v(x))\varphi(x) := f(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Designamos

$$g_n := c_1 |u_n|^{p_1-1} |v_n|^{q_1} |\varphi| .$$

Observamos que

$$g_n(x) = c_1 |u_n(x)|^{p_1-1} |v_n(x)|^{q_1} |\varphi(x)| \to g(x) = c_1 |u(x)|^{p_1-1} |v(x)|^{q_1} |\varphi(x)| \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N$$

e ainda, lançando mão da hipótese (F_2),

$$|f_n| = |F_u(x, u_n, v_n)| \leq c_1 |u_n|^{p_1-1} |v_n|^{q_1} |\varphi| = g_n$$

e pela Lema 4.1,

$$\lim_{n\to\infty} \|g_n - g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = 0.$$

Note que estamos em condições de usar a seguinte versão do Teorema da Convergencia Dominada de Lebesgue em [2]*:*

Sejam $(f_n), (g_n)$ *sequências de funções em* $L^1(\mathbb{R}^N)$ *tais que* $f_n \to f$ *e* $g_n \to g$ *q.s. em* $\mathbb{R}^N$*. Suponha que* $|f_n| \leq g_n$ *q.s. em* $\mathbb{R}^N$ *e que* $\lim \|g_n - g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = 0$ *. Então,* $\lim \|f_n - f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = 0$ *e* $|f| \leq |g|$ *q.s. em* $\mathbb{R}^N$ *.*

Podemos concluir que

$$\int_{\mathbb{R}^N} F_u(x, u_n, v_n)\psi dx \to \int_{\mathbb{R}^N} F_u(x, u, v)\psi dx.$$

Um argumento análogo mostra a convergência do termo envolvendo $F_v(x, u_n, v_n)$ *.*

Assim, $N'(u_n, v_n) \to N'(u, v)$ *fortemente em* $E'_{p,q}$*.*

□

Lema 4.3 *(Condição de Palais–Smale) Suponha que as hipóteses* $(H_1), (H_2), (F_1), (F_2)$ *e* (F_3) *sejam satisfeitas. Então, o funcional* $\mathcal{I}$*:* $E_{p,q} \to \mathbb{R}$ *definido por*

$$\mathcal{I}(u, v) = \frac{1}{p} \|u\|^p_{E_p} + \frac{1}{q} \|v\|^q_{E_q} - \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u, v)dx,$$

satisfaz a condição de Palais-Smale.

Revista Multidisciplinar do Nordeste Mineiro, v.13, 2025
ISSN: 2178-6925
DOI: 10.61164/rmnm.13i14202

Demonstração : *Considere* $(u_n, v_n) \subset E_{p,q}$ *uma sequência tal que*

$$|\mathcal{I}(u_n, v_n)| \leq \ C, \mathcal{I}'(u_n, v_n) \to 0 \ em \ E'_{p,q}.$$

Nosso objetivo é mostrar que (u_n, v_n) *admite uma subsequência convergente em* $E_{p,q}$ *.*
Dado $\epsilon > 0$*, existe um* n_0 *natural tal que* $|\mathcal{I}(u_n, v_n)| \leq C$ *e* $\left\|\mathcal{I}'(u_n, v_n)\right\| \leq \epsilon, \forall n \geq n_0$*.*
Assim, $\forall n \geq n_0$*,*

$$\mu\mathcal{I}(u_n, v_n) - \left\langle \mathcal{I}'(u_n, v_n), (u_n, v_n) \right\rangle \leq \mu C + \epsilon \left\|(u_n, v_n)\right\|_{E_{p,q}}.$$

Sem perda de generalidade, considere $p < q < \mu$*. Então, utilizando as hipóteses* $(F_1), (F_2)$ *e* (F_3)

$$\begin{aligned}
& \mu\mathcal{I}(u_n, v_n) - \left\langle \mathcal{I}'(u_n, v_n), (u_n, v_n) \right\rangle \\
= \ & \mu \left\{ \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n|^p + a(x) |u_n|^p\right) dx + \frac{1}{q} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v_n|^q + b(x) |v_n|^q\right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u_n, v_n) dx \right\} \\
- \ & \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n|^p + a(x) |u_n|^p + |\nabla v_n|^q + b(x) |v_n|^q\right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} \left(F_u(x, u_n, v_n) u_n + F_v(x, u_n, v_n) v_n\right) dx \right\} \\
= \ & \left(\frac{\mu}{p} - 1\right) \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n|^p + a(x) |u_n|^p\right) dx + \left(\frac{\mu}{q} - 1\right) \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v_n|^q + b(x) |v_n|^q\right) dx \\
+ \ & \int_{\mathbb{R}^N} \left(F_u(x, u_n, v_n) u_n + F_v(x, u_n, v_n) v_n - \mu F(x, u_n, v_n)\right) dx \\
\geq \ & \left(\frac{\mu}{p} - 1\right) \|u_n\|_{E_p}^p + \left(\frac{\mu}{q} - 1\right) \|v_n\|_{E_q}^q \\
\geq \ & \left(\frac{\mu}{q} - 1\right) \left\{ \|u_n\|_{E_p}^p + \|v_n\|_{E_q}^q \right\} \\
= \ & \left(\frac{\mu}{q} - 1\right) \left\|(u_n, v_n)\right\|_{E_{p,q}}.
\end{aligned}$$

Assim sendo , obtemos $\forall n \geq n_0$*,*

$$\begin{aligned}
\mu C + \epsilon \left\|(u_n, v_n)\right\|_{E_{p,q}} & \geq \mu\mathcal{I}(u_n, v_n) - \left\langle \mathcal{I}'(u_n, v_n), (u_n, v_n) \right\rangle \\
& \geq \left(\frac{\mu}{q} - 1\right) \left\|(u_n, v_n)\right\|_{E_{p,q}} \ ,
\end{aligned}$$

implicando que a sequência $\{(u_n, v_n)\}$ *é limitada no espaço* $E_{p,q}$*.*

Revista Multidisciplinar do Nordeste Mineiro, v.13, 2025
ISSN: 2178-6925
DOI: 10.61164/rmnm.13i14202

Considere agora a aplicação dualidade D definida por

$$\begin{array}{rccc} D & : & E_{p,q} & \longrightarrow & E'_{p,q} \\ & & (u,v) & \longmapsto & D(u,v) \end{array}$$

onde $D(u,v) = \langle (u,v), . \rangle_{E_{p,q}} = \mathcal{I}'(u,v) + N'(u,v) \ \in E'_{p,q}$.

Novamente, pela monotonicidade do p-Laplaciano em [5], temos D^{-1} o operador inverso de D, onde D é uma isometria. Aplicando D^{-1} à sequência (PS), temos

$$(u_n, v_n) = D^{-1}(\mathcal{I}'(u_n, v_n)) + D^{-1}(N'(u_n, v_n)).$$

Segue disto que (u_n, v_n) possui uma subsequência convergente, pois por hipótese, $\mathcal{I}'(u_n, v_n) \to 0$ e D é uma isometria. Com efeito, pelo Lema 4.2, N' é um operador compacto e desde que a sequência (u_n, v_n) é limitada, assim $N'(u_n, v_n)$ possui uma subsequencia convergente.
Epílogo : (u_n, v_n) possui uma subsequencia convergente, isto significa que o funcional $\mathcal{I}$ satisfaz a condição (P.S.).

□

5 Demonstração do Teorema Principal

Demonstração : *Para aplicar o Teorema do Passo da Montanha e garantir a existência de uma solução fraca não trivial do sistema $(\mathbb{S})$, verificamos que o funcional $\mathcal{I}$: $E_{p,q} \to \mathbb{R}$ satisfaz todas as condições requeridas:*

1. $\mathcal{I} \in C^1(E_{p,q}, \mathbb{R})$;

2. *satisfaz a condição de Palais–Smale (Lema 4.3);*

3. *possui a geometria característica do Teorema do Passo da Montanha.*

possui a geometria característica do Teorema do Passo da Montanha.

Utilizando a hipótese (F_3), mostramos que $F(x,u,v)$ satisfaz condições inferiores e superiores de crescimento que garantem a forma geométrica desejada do funcional.
(a) Crescimento para $|U| \geq 1$:

Pela hipótese (F_3) , $\forall x \in \mathbb{R}^N$ e $U = (u,v) \in \mathbb{R}^2$, temos

$$\left| \frac{\nabla F(x,U)}{F(x,U)} \right| \geq \frac{\mu}{|U|}.$$

Revista Multidisciplinar do Nordeste Mineiro, v.13, 2025
ISSN: 2178-6925
DOI: 10.61164/rmnm.13i14202

Integrando (a) *de* 1 *até* $|U|$, *se* $U \geq 1$*(ou caso contrário),*

$$ln\left|\frac{F(x,U)}{F(x,\pm 1)}\right| \geq ln\,|U|^{\mu}.$$

Como $F(x,U) > 0$ *para todo* $U \in \mathbb{R}^2$ *e a função logarítmica é crescente, obtemos*

$$F(x,U) \geq F(x,\pm 1)\,|U|^{\mu} = \min_{|V|=1} F(x,V)\,|U|^{\mu} > 0, \forall x \in \mathbb{R}^N, |U| \geq 1.$$

Isso significa que, dado um conjunto $B \subset \mathbb{R}^N$ *limitado,* $\forall x \in B$, *como* F *é de classe* C^1, $\exists \bar{c} = \bar{c}(B)$; $F(x,U) \geq \bar{c}\,|U|^{\mu}$, $\forall x \in B, |U| \geq 1$.

(b) *Crescimento para* $0 < |U| \leq 1$*:*
Por (F_3),

$$\left|\frac{\nabla F(x,U)}{F(x,U)}\right| \geq \frac{\mu}{|U|}.$$

Integrando (b) *de* $|U|$ *até* 1, *se* $0 < |U| \leq 1$,

$$ln\left|\frac{F(x,\pm 1)}{F(x,U)}\right| \geq ln\left(\frac{1}{|U|^{\mu}}\right).$$

Ainda , $\mu \geq max\,\{p,q\} > 1$. *Isto implica que* , $|U|^{\mu} < |U| < 1$. *Assim,* $\dfrac{1}{|U|^{\mu}} > 1, U \neq 0$. *Ainda para mais,* $F(x,U) > 0$ *e a função logarítmica é crescente, de modo consequente,*

$$\left|\frac{F(x,\pm 1)}{F(x,U)}\right| \geq \frac{1}{|U|^{\mu}}$$

e, segue que

$$0 \leq F(x,U) \leq \max_{|V|=1} F(x,V)\,|U|^{\mu}, \forall x \in \mathbb{R}^N,\ 0 < |U| \leq 1.$$

Assumindo a condição (F_1), *então existe uma constante* c_3 *tal que* $\max\limits_{|V|=1} F(x,V) \leq c_3$. *Defina* $m = max\,\{p,q\}$. *Segue que* $\lim\limits_{|U|\to 0} \dfrac{F(x,U)}{|U|^m} = 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^N$, *isto é, dado* $\epsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$F(x,U) \leq \epsilon\,|U|^m = \epsilon\left(|u|^2 + |v|^2\right)^{\frac{m}{2}} \leq \epsilon c_4\left(|u|^m + |v|^m\right),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$ *e* $|U| \leq \delta$.

ISSN: 2178-6925
DOI: 10.61164/rmnm.13i14202

Outrossim, usando $(F_1), (F_2)$ *e a desigualdade de Young*

$$\begin{aligned} F(x,u,v) &= \int_0^u F_u(x,s,v)ds + \int_0^v F_v(x,0,s)ds + F(x,0,0) \\ &\leq c_1 \int_0^u |s|^{p_1-1}\,|v|^{q_1}\,ds + c_2 \int_0^v |u|^{q_2}\,|s|^{p_2-1}\,ds \\ &\leq c_5\left(|u|^{p_1+q_1} + |v|^{p_1+q_1} + |u|^{p_2+q_2} + |v|^{p_2+q_2}\right), \end{aligned}$$

$\forall\ x \in \mathbb{R}^N$ *e* $\forall\ (u,v) \in \mathbb{R}^2$.

Observe que , em particular, vale para todo $x \in \mathbb{R}^N$ *e* $|U| \geq \delta$.

Agora, podemos condensar todas essas estimativas para obter a seguinte estimativa

$$F(x,u,v) \leq \epsilon c_4\left(|u|^m + |v|^m\right) + c_5\left(|u|^{p_1+q_1} + |v|^{p_1+q_1} + |u|^{p_2+q_2} + |v|^{p_2+q_2}\right)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$ *e* $U \in \mathbb{R}^2$.

Manipulando o funcional $\mathcal{I}$ *conseguimos obter a seguinte estimativa*

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(u,v) &= \frac{1}{p}\|u\|_{E_p}^p + \frac{1}{q}\|v\|_{E_q}^q - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u,v)dx \\ &\geq \frac{1}{p}\|u\|_{E_p}^p + \frac{1}{q}\|v\|_{E_q}^q - \epsilon c_4 \int_{\mathbb{R}^N}\left(|u|^m + |v|^m\right)dx \\ &- c_5\int_{\mathbb{R}^N}\left(|u|^{p_1+q_1} + |v|^{p_1+q_1} + |u|^{p_2+q_2} + |v|^{p_2+q_2}\right)dx \\ &\geq \frac{1}{p}\|u\|_{E_p}^p + \frac{1}{q}\|v\|_{E_q}^q - \epsilon c_4\left(\|u\|_{E_p}^m + \|v\|_{E_q}^m\right) \\ &- c_5\left(\|u\|_{E_p}^{p_1+q_1} + \|v\|_{E_q}^{p_1+q_1} + \|u\|_{E_p}^{p_2+q_2} + \|v\|_{E_q}^{p_2+q_2}\right). \end{aligned}$$

Considere a norma $\|(u,v)\|_{E_{p,q}} = \rho > 0$ *suficientemente pequena, então, aplicando a estimativa última para o funcional* $\mathcal{I}$, *existe* $\alpha = \alpha(\rho) > 0$ *tal que*

$$\Phi(u,v) \geq \alpha(\rho) > 0.$$

Sob outra perspectiva, por (a), $F(x,U) \geq \bar{c}|U|^\mu$, $\forall x \in B, |U| \geq 1$. *Executando* $(u,v) := (tu,tv)$ *para* $t \in \mathbb{R}$ *e usando a definicao do funcional* Φ *segue que*

$$\begin{aligned} \Phi(tu,tv) &\leq t^p\left\{\frac{1}{p}\|u\|_{E_p}^p\right\} + t^q\left\{\frac{1}{q}\|v\|_{E_q}^q\right\} - t^\mu \bar{c}\int_{\mathbb{R}^N}|U|^\mu\,dx \\ &= t^pA + t^qB - t^\mu C. \end{aligned}$$

Finalmente, fazendo $t \to \infty$, *como* $\mu > \max\{p,q\}$, *obtemos que* $\Phi(tu,tv) \to -\infty$. *Em outros termos, existe um elemento* $e \in E_{p,q}$ *tal que*

$$\Phi(e) < 0.$$

Revista Multidisciplinar do Nordeste Mineiro, v.13, 2025

ISSN: 2178-6925

DOI: 10.61164/rmnm.13i14202

Provado o Lema 4.3, *isto é,* $\mathcal{I} \in C^1(E_{p,q}, \mathbb{R})$, (*vide* [7]), *satisfaz a condição* $(P.S.)$ *e* $\mathcal{I}$ *tem a geometria do Passo da Montanha, então podemos concluir a existência de uma solução fraca não trivial para o problema* $(\mathbb{S})$ *pelo Teorema do Passo da Montanha* (*Teorema* 3.2) . ■

Referências

[1] *ALVES, Claudionor O. Existência de solução positiva de equações elípticas não lineares em* $\mathbb{R}^N$ *. Tese (Doutorado) — Universidade de Brasília,* 1996.

[2] *BREZIS, Haim. Analyse Fonctionnelle: Théorie et Applications. Paris: Masson,* 1987 .

[3] *COSTA, D. G. On a class of elliptic systems in* $\mathbb{R}^N$ *. Electronic Journal of Differential Equations, v. 1994, n. 7, p. 1–14, 1994.*

[4] *DJELLIT, Ali; TAS, Saadia. Existence of solutions for a class of elliptic systems in* $\mathbb{R}^N$ *involving the p-Laplacian. Electronic Journal of Differential Equations, v. 2003, n. 2003(01), p. 1–8, 2003.*

[5] *PERAL, Ireneo. Multiplicity of solutions for the p-Laplacian. In: Second School on Nonlinear Functional Analysis and Applications to Differential Equations, Trieste, Italy, 21 April – 9 May 1997.*

[6] *RABINOWITZ, Paul H. Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations. Providence: American Mathematical Society, 1986. (Regional Conference Series in Mathematics, v. 65).*

[7] *WILLEM, Michel. Minimax Theorems. Boston: Birkhäuser, 1996. (Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, v. 24).*