Revista Multidisciplinar do Nordeste Mineiro, v.14, 2025
ISSN: 2178-6925
DOI: 10.61164/b6c43447

Modelagem Matemática e Ajuste de Curvas: Um Método de Ensino Aplicado à Evolução Populacional

Mathematical Modeling and Curve Fitting: A Teaching Method Applied to Population Growth

Elson Leal de Moura
Doutorado em Matemática
Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri – UFVJM,
Teófilo Otoni/MG, Brasil
elson.moura@ufvjm.edu.br

Aurenilson de Matos Lima
Mestrado em PROFMAT
Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri – UFVJM,
Teófilo Otoni/MG, Brasil
aurenilson.lima@ufvjm.edu.br

Recebido: 18/07/2025 **Aceito:** 21/07/2025 **Publicação**: 30/07/2025

Resumo: Este trabalho apresenta a Modelagem Matemática como uma abordagem alternativa para o ensino de conteúdos matemáticos no Ensino Médio, promovendo o protagonismo dos alunos no aprendizado. Além de uma breve contextualização histórica, o estudo discute estratégias para aplicação da modelagem em sala de aula, baseando-se em concepções da Educação Matemática.

A revisão da literatura destaca a modelagem como ferramenta essencial para conectar conceitos matemáticos a fenômenos do mundo real. Nesse contexto, a teoria do ajuste de curvas foi explorada com o método dos Mínimos Quadrados, abordando modelos lineares simples, polinomiais, exponenciais e logísticos, sendo este último tratado pelo método de Ford-Walford.

Por fim, são propostas atividades práticas para que os alunos utilizem o ajuste de curvas na criação de modelos matemáticos, incentivando a formulação de hipóteses e a interação com problemas reais e sociais.

Revista Multidisciplinar do Nordeste Mineiro, v.14, 2025
ISSN: 2178-6925
DOI: 10.61164/b6c43447

Palavras-chave: Modelagem Matemática; Ajuste de Curvas; Método dos Mínimos Quadrados; Modelos Matemáticos.

Abstract: This work presents Mathematical Modeling as an alternative approach to teaching mathematical content in high school, promoting student protagonism in the learning process. In addition to a brief historical contextualization, the study discusses strategies for applying modeling in the classroom, based on concepts from Mathematics Education.

The literature review highlights modeling as an essential tool for connecting mathematical concepts to real-world phenomena. In this context, the theory of curve fitting was explored using the Least Squares method, addressing simple linear, polynomial, exponential, and logistic models, with the latter being developed through the Ford-Walford method.

Finally, practical activities are proposed for students to apply curve fitting in the creation of mathematical models, encouraging hypothesis formulation and interaction with real and social problems.
Keywords: Mathematical Modeling; Curve Fitting; Least Squares Method; Mathematical Models.

1 Introdução

A pesquisa sobre o ensino de Modelagem Matemática é de extrema relevância para o aprimoramento da educação matemática no Ensino Médio, pois propõe um método de ensino que vai além do aprendizado teórico e abstrato, oferecendo aos alunos uma visão mais prática e aplicada da Matemática. O questionamento "Por que e como ensinar Matemática?" é fundamental, pois garante que a aplicabilidade dessa disciplina seja constantemente revista, evitando a alienação dos alunos em relação ao seu uso no cotidiano e nas ciências.

A proposta de utilizar Modelagem Matemática e Ajuste de Curvas no ensino destaca-se como uma estratégia inovadora, ao possibilitar que os alunos analisem e compreendam fenômenos reais, como a evolução populacional, por meio de ferramentas matemáticas. O uso desses métodos de modelagem permite uma aprendizagem ativa, em que os alunos não apenas absorvem fórmulas, mas também as aplicam na resolução de problemas concretos, conectando a teoria matemática com a prática cotidiana.

Além disso, a Modelagem Matemática é apresentada como uma disciplina que, segundo Bassanezi (2002), é tanto uma estratégia pedagógica quanto um método científico, com a capacidade de converter problemas reais em problemas matemáticos. Essa característica torna a Modelagem Matemática uma abordagem poderosa para ensinar conteúdos matemáticos, pois promove o desenvolvimento de habilidades analíticas e práticas nos alunos.

Revista Multidisciplinar do Nordeste Mineiro, v.14, 2025
ISSN: 2178-6925
DOI: 10.61164/b6c43447

A pesquisa também destaca a longa trajetória histórica da Modelagem Matemática, que remonta a práticas de povos antigos, como ressaltam Biembengut e Hein (2004), e seu papel fundamental no desenvolvimento da Matemática como uma ciência capaz de gerar soluções para problemas práticos e científicos. O uso de Modelos Matemáticos em diversas áreas do conhecimento, como Engenharia, Física, Economia e Estatística, desde a década de 1940, como menciona Filho (2008), demonstra sua crescente importância e aplicação em um mundo cada vez mais dependente de soluções quantitativas e precisas.

Por fim, a proposta apresentada neste estudo evidencia a relevância da Modelagem Matemática no contexto educacional, vide SILVEIRA,(2013), pois contribui para a formação de alunos críticos, capazes de analisar e resolver problemas com base em dados reais, além de facilitar a transição do ensino abstrato para a prática aplicada, essencial no desenvolvimento das ciências e na solução de problemas cotidianos.

2 Regressão - Ajuste de Curvas

Ao iniciar um processo de modelagem, é essencial que o educador compreenda que a escolha do tema pode gerar uma ampla gama de conteúdos matemáticos. O primeiro passo, que envolve contagem e medição, leva à organização de dados em tabelas, o que se torna a base para a modelagem e a análise matemática do fenômeno estudado. Isso demonstra a importância da abordagem prática e experimental na construção do conhecimento matemático.

O estudo do ajuste de curvas, com base na regressão estatística, teve sua origem no século XIX com Sir Francis Galton, que analisou a relação entre altura de pais e filhos. Sua descoberta do conceito de "regressão"trouxe uma nova perspectiva sobre a identificação de tendências em dados. Esse conceito evoluiu para os métodos modernos de regressão e ajuste de curvas, amplamente utilizados em diversas áreas do conhecimento, como Engenharia, Economia, Biologia e Ciências Sociais.

A aplicação do ajuste de curvas vai além da simples organização de dados; ela permite realizar previsões e compreender tendências. Diferentes modelos matemáticos podem ser utilizados dependendo do fenômeno analisado, como o ajuste linear simples, polinomial quadrático, exponencial e logístico. Cada um desses modelos possui características específicas e aplicações distintas, sendo o modelo logístico especialmente relevante para estudos populacionais, pois incorpora fatores como capacidade de suporte e taxa de crescimento.

Essa pesquisa é relevante porque reforça o papel da Matemática como uma ciência aplicada, conectando teoria e prática. No ensino, a modelagem matemática pode tornar os conteúdos mais acessíveis e interessantes para os alunos, ajudando-os a desenvolver habilidades analíticas e críticas. Além disso, a capacidade de prever comportamentos e identificar padrões com base em dados reais é essencial para a tomada de decisões em diversas áreas do conhecimento.

Revista Multidisciplinar do Nordeste Mineiro, v.14, 2025
ISSN: 2178-6925
DOI: 10.61164/b6c43447

Portanto, o estudo do Ajuste de Curvas na Modelagem Matemática não apenas enriquece o ensino da Matemática, mas também promove uma visão mais ampla e integrada da disciplina, tornando-a mais significativa e útil no contexto educacional e científico.

3 Método dos Minímos Quadrados

O Método dos Mínimos Quadrados é uma técnica matemática fundamental para ajuste de curvas e regressão estatística, amplamente utilizada na modelagem matemática, estatística e ciência de dados. Sua origem remonta ao século XVIII, e ao longo do tempo, diversos matemáticos e cientistas contribuíram para seu desenvolvimento e aprimoramento. Entre os principais pesquisadores que não podem ser ignorados ao investigar esse método, destacam-se:

1. Carl Friedrich Gauss (1777–1855): o matemático alemão Carl Friedrich Gauss é frequentemente creditado como um dos pioneiros na formulação do Método dos Mínimos Quadrados. Embora o método tenha sido publicado formalmente por Legendre, Gauss alegou ter usado a técnica em suas pesquisas astronômicas já em 1795, antes de sua publicação oficial.

2. Adrien-Marie Legendre (1752–1833) : o matemático francês Adrien-Marie Legendre foi o primeiro a publicar formalmente o método em 1805, em sua obra Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes.

3. Pierre-Simon Laplace (1749–1827) : Laplace contribuiu significativamente para a teoria dos erros e aprimorou a justificativa estatística do método.

4. Francis Galton (1822–1911) : foi um dos primeiros a aplicar a regressão estatística e a correlação em estudos biológicos e sociais.

5. Andrey Kolmogorov (1903–1987) : contribuiu para a Formalização Estatística .

Esses pesquisadores estabeleceram a base teórica e prática para o Método dos Mínimos Quadrados, vide CRATO(2000), que hoje é amplamente utilizado em Engenharia, Economia, Física, Ciência de Dados e Inteligência Artificial. Suas contribuições garantiram que o método se tornasse uma ferramenta indispensável para análise de dados, previsão de tendências e modelagem matemática.

Portanto, qualquer estudo sobre o Método dos Mínimos Quadrados deve considerar essas pesquisas fundamentais para compreender sua evolução, justificativa matemática e aplicações práticas.

No ajuste linear simples $y(x) = f(x; a, b) = ax + b$, devemos encontrar valores de a e b da reta $y = ax + b$ tais que o desvio padrão seja o menor possível, ou seja, estamos interessados em minimizar o erro e procuramos os valores dos coeficientes a e b para os quais

Revista Multidisciplinar do Nordeste Mineiro, v.14, 2025
ISSN: 2178-6925
DOI: 10.61164/b6c43447

$$\delta(a,b) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - (ax_i + b))^2,$$

seja mínimo.

Nas rotinas utilizadas para minimizar a expressão anterior, utilizamos várias variáveis e conteúdos que não pertencem à grade curricular do Ensino Médio e que optamos por não reproduzir neste trabalho, restringindo-nos a descrever que, após os procedimentos matemáticos, os valores de a e b podem ser obtidos resolvendo o sistema

$$\begin{cases} (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)a + (\sum_{i=1}^{n} x_i)b = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ (\sum_{i=1}^{n} x_i)a + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i, \end{cases}$$

o que pode ser feito pela regra de Cramer, onde obtemos que

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}.$$

Generalizando o procedimento do Método dos Mínimos Quadrados para um ajuste polinomial de grau superior a um, obtemos para um conjunto de n dados coletados $(x_i, y_i), i = 1, 2, \ldots, n$ um sistema linear da forma

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i & \ldots & \sum_{i=1}^{n} x_i^n \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \ldots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^n & \sum_{i=1}^{n} x_i^{n+1} & \ldots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^n \end{pmatrix}.$$

Revista Multidisciplinar do Nordeste Mineiro, v.14, 2025
ISSN: 2178-6925
DOI: 10.61164/b6c43447

4 Proposta de atividade utilizando a modelagem matemática

Este estudo apresenta uma proposta de atividade baseada na Modelagem Matemática, com foco na análise da evolução populacional. A atividade pode ser aplicada a alunos da Educação Básica, especialmente aos do 1º ano do Ensino Médio, etapa em que o estudo das funções matemáticas é aprofundado.

O principal objetivo é fornecer aos alunos as ferramentas e técnicas necessárias para construir modelos matemáticos — linear simples, exponencial e logístico — a partir de dados populacionais públicos disponibilizados pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). A atividade permitirá que os estudantes compare, analise e identifique qual curva se ajusta melhor ao conjunto de dados estudados ao longo do tempo.

A proposta inclui uma sequência detalhada para a elaboração e análise dos modelos, utilizando como referência a evolução populacional da cidade de Teófilo Otoni, conforme projeções do IBGE para o período de 2011 a 2019.

A atividade será conduzida em sala de aula e/ou no laboratório de informática, seguindo uma estrutura organizada em etapas:

Contextualização: O professor introduzirá o tema da dinâmica populacional, explorando conceitos matemáticos e estatísticos envolvidos.

Coleta de Dados: Os alunos acessarão o site do IBGE para obter informações sobre a população do município ao longo dos anos analisados. Caso necessário, o professor pode fornecer uma tabela com os dados já organizados.

Construção dos Modelos: Os estudantes utilizarão os dados coletados para desenvolver os modelos linear, exponencial e logístico, aplicando os conceitos matemáticos necessários.

Análise e Comparação: Após a construção dos modelos, os alunos deverão comparar os resultados e interpretar qual modelo melhor descreve a evolução populacional da cidade, justificando suas escolhas com base nos dados e na teoria.

Essa abordagem promove um aprendizado prático e significativo, permitindo que os alunos compreendam a aplicação da matemática em situações reais, desenvolvam habilidades analíticas e fortaleçam seu raciocínio lógico.

4.1 Construção dos Modelos

Os dados utilizados na construção dos modelos foram coletados no site do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). Como base para o estudo, analisaremos o comportamento populacional de Teófilo Otoni (MG) no período de 2011 a 2019.

Revista Multidisciplinar do Nordeste Mineiro, v.14, 2025
ISSN: 2178-6925
DOI: 10.61164/b6c43447

A Tabela 1 mostra os dados coletados no site do IBGE.

Tabela 1: População do município de Teófilo Otoni - MG.

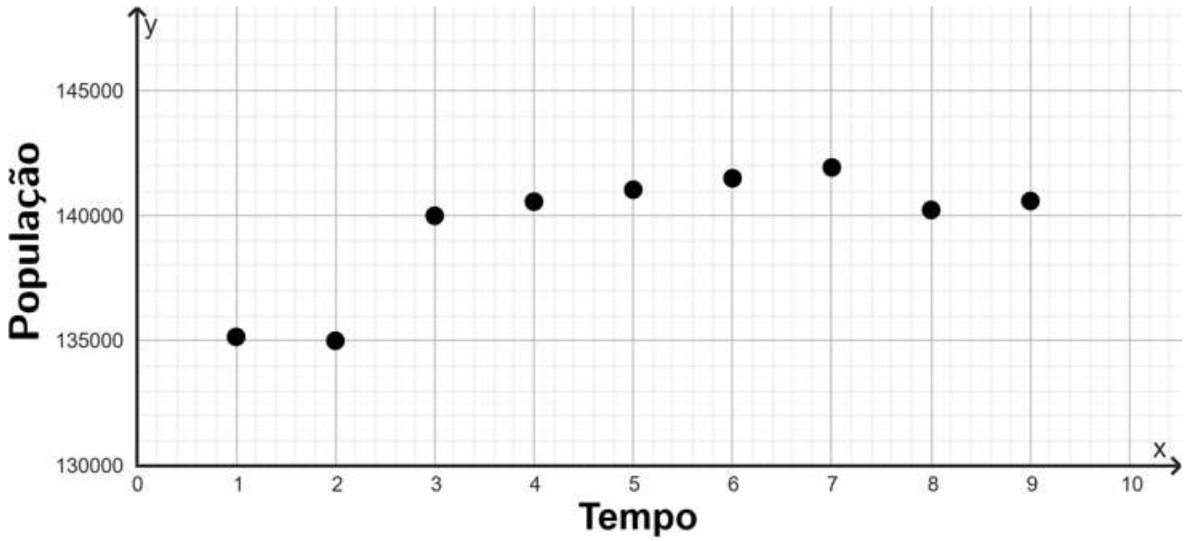
Ano	**Tempo**	**Número de habitantes**
2011	1	135.154
2012	2	135.549
2013	3	140.067
2014	4	140.567
2015	5	141.046
2016	6	141.502
2017	7	141.934
2018	8	140.235
2019	9	140.592

Fonte: Autoria Própria - Dados de Projeções Demográficas - IBGE

Nesta etapa, considera-se que os alunos já estejam familiarizados com a situação proposta. Os dados foram coletados e as variáveis de estudo (tempo e população) devidamente definidas.

Em seguida, inicia-se a fase de matematização, formulação e resolução dos modelos matemáticos, começando com a construção do diagrama de dispersão dos dados. Veja a Figura a seguir.

Figura 1: Diagrama de Dispersão da População de Teófilo Otoni - MG de 2011 a 2019



Fonte: Autoria Própria.

Revista Multidisciplinar do Nordeste Mineiro, v.14, 2025
ISSN: 2178-6925
DOI: 10.61164/b6c43447

4.2 Ajuste por Modelo Linear Simples

O ajuste linear simples, como visto anteriormente, é caracterizado pela função

$$y = ax + b \qquad \textbf{(4.1)}$$

O próximo passo é obter os parâmetros a e b utilizando o Método dos Mínimos Quadrados, de modo que esses parâmetros minimizem as somas dos desvios. Como descrito anteriormente, para encontrar os parâmetros a e b, é necessário resolver

$$\begin{cases} (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)a + (\sum_{i=1}^{n} x_i)b = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ (\sum_{i=1}^{n} x_i)a + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i; \end{cases} \qquad \textbf{(4.2)}$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}. \qquad \textbf{(4.3)}$$

Para auxiliar na composição do sistema **(4.2)** é conveniente construir a Tabela 2:

Tabela 2: Ajuste Linear da População de Teófilo Otoni - MG.

Ano	x_i	**POPULAÇÃO** (y_i)	$x_i.y_i$	$(x_i)^2$	$(x_i - \bar{x_i})^2$
2011	1	135.154	135.154	1	16
2012	2	135.549	271.098	4	9
2013	3	140.067	420.201	9	4
2014	4	140.567	562.268	16	1
2015	5	141.046	705.230	25	0
2016	6	141.502	849.012	36	1
2017	7	141.934	993.538	49	4
2018	8	140.235	1.121.880	64	9
2019	9	140.592	1.265.328	81	16
Somatório $= \sum$	45	1.256.646	6.323.709	285	60

Fonte: Autoria Própria - Dados de Projeções Demográficas - IBGE.

Revista Multidisciplinar do Nordeste Mineiro, v.14, 2025
ISSN: 2178-6925
DOI: 10.61164/b6c43447

Transformando cada ano em um respectivo x_i encontramos os valores das médias aritméticas $\bar{x_i}$ e $\bar{y_i}$,

$$=\frac{\sum x_i}{n} = \frac{45}{9} = 5 \text{ e } \bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{1256646}{9} = 139.627,3333,$$

e utilizando a equação **(4.3)** e a segunda equação do sistema **(4.2)** encontramos os parâmetros a e b que melhor ajustam os valores da população teófilo-otonense.

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{6.323.709 - 9.(5).(139.627,3333}{60}) = 674,65.$$

Desde que $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)a + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i$, segue que

$$\begin{aligned} & 45a + 9b = 1.256.646 \\ \Rightarrow\ & 45.(674,65) + 9b = 1.256.646 \\ \Rightarrow\ & 9b = 1.256.646 - 30.359,25 \\ \Rightarrow\ & b = \frac{1.226.286,75}{9} \\ \Rightarrow\ & b = 136.254,0833. \end{aligned}$$

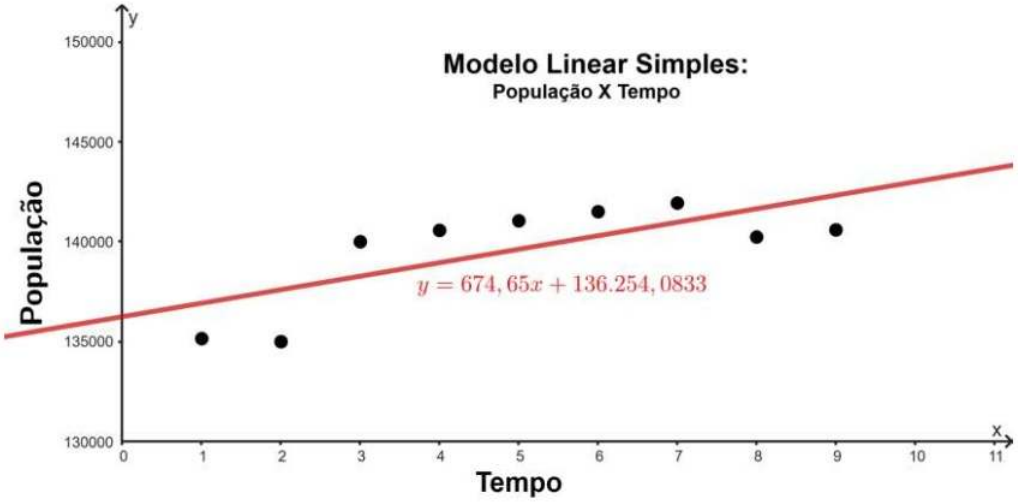
Substituindo na equação **(4.1)** os resultados encontrados de a e b temos a função de ajuste linear relativa aos dados populacionais de Teófilo Otoni – MG no período de 2011 a 2019:

$$y = 674,65x + 136.254,0833. \qquad \textbf{(4.4)}$$

O gráfico da figura seguinte corresponde à dispersão dos pontos e a reta referente ao ajuste linear simples calculado pelo método dos mínimos quadrados da população teófilo-otonense de 2011 a 2019.

Revista Multidisciplinar do Nordeste Mineiro, v.14, 2025
ISSN: 2178-6925
DOI: 10.61164/b6c43447

Figura 2: Modelo Linear Simples da População de Teófilo Otoni - MG de 2011 a 2019.



Fonte: Autoria Própria.

4.3 Ajuste por Modelo Linear Exponencial

Para os modelos exponenciais, o ajuste é feito através de curvas do tipo

$$y = be^{ax}, \text{ com } b > 0. \qquad \textbf{(4.5)}$$

Contudo, para utilizar o método dos Mínimos Quadrados é necessário realizar uma mudança de variável. Assim, ao aplicarmos o logaritmo neperiano em ambos os lados da equação **(4.5)**, obtemos

$$ln(y) = ln(be^{ax}) = ln(b) + ln(e)^{ax} = ln(b) + ax.$$

Usando a mudança de variável $c = ln(b)$, obtemos um modelo linear dado por

$$z = ln(y) = c + ax. \qquad \textbf{(4.6)}$$

Revista Multidisciplinar do Nordeste Mineiro, v.14, 2025
ISSN: 2178-6925
DOI: 10.61164/b6c43447

Feito isso, podemos proceder utilizando as mesmas técnicas implementadas no processo de construção do modelo linear simples. Ao aplicarmos o logaritmo neperiano para a população y, c e a da equação **(4.6)**, podemos empregar o método dos Mínimos Quadrados de forma que onde o sistema linear correspondente terá a forma

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} ln(y_i) \\ \sum_{i=1}^{n} x_i ln(y_i) \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(4.7)}$$

Em vista disso para auxiliar na resolução do sistema **(4.7)** é conveniente construir a Tabela 3 , transformando cada ano em um respectivo x_i.

Tabela 3: Ajuste Exponencial da População de Teófilo Otoni - MG.

Ano	x_i	**POPULAÇÃO** (y_i)	$x_i.y_i$	$(x_i)^2$	$ln(y_i)$	$x_i ln(y_i)$
2011	1	135.154	135.154	1	11,8141	11,8141
2012	2	135.549	271.098	4	11,8170	23,6340
2013	3	140.067	420.201	9	11,8498	35,5494
2014	4	140.567	562.268	16	11,8534	47,4136
2015	5	141.046	705.230	25	11,8568	59,2840
2016	6	141.502	849.012	36	11,8600	71,1600
2017	7	141.934	993.538	49	11,8631	83,0417
2018	8	140.235	1.121.880	64	11,8510	94,8080
2019	9	140.592	1.265.328	81	11,8536	106,6824
Somatório = $\sum$	45	1.256.646	6.323.709	285	106,6188	533,3872

Fonte: Autoria Própria - Dados de Projeções Demográficas - IBGE.

Efetuando as devidas substituições no sistema **(4.7)** obtemos

$$\begin{pmatrix} 9 & 45 \\ 45 & 285 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 106,6188 \\ 533,3872 \end{pmatrix}, \qquad \textbf{(4.8)}$$

$$\Longrightarrow \; a = \frac{0,2932}{60} \approx 0,0049; \; c = \frac{106,3983}{9} \approx 11,8221.$$

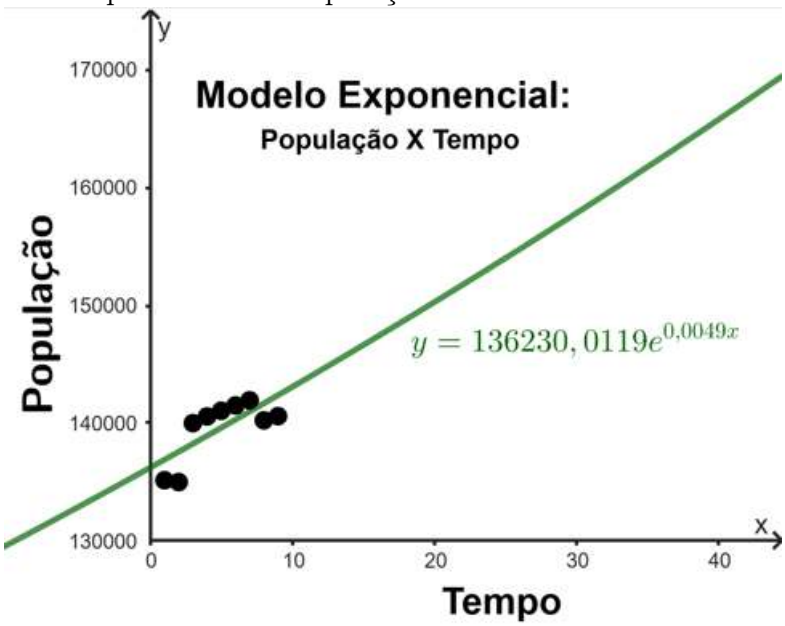
Revista Multidisciplinar do Nordeste Mineiro, v.14, 2025
ISSN: 2178-6925
DOI: 10.61164/b6c43447

Em seguida, é necessário substituir os parâmetros encontrados na equação **(4.5)** para obter o modelo de ajuste exponencial que melhor representa a evolução populacional de Teófilo Otoni – MG no período de 2011 a 2019, considerando a aproximação de quatro casas decimais para os valores de $ln(y_i)$:

$$y = 136.230,0119e^{0,0049x}.$$

O gráfico da figura a seguir corresponde à dispersão dos pontos e a curva referente ao ajuste exponencial calculado pelo Método dos Mínimos quadrados da população teófilo-otonense de 2011 a 2019.

Figura 2: Modelo Exponencial da População de Teófilo Otoni - MG de 2011 a 2019.



Fonte: Autoria Própria.

4.4 Modelo linear simples da evolução da população teófilo-otonense no período de 2011 a 2019 pelo GeoGebra Clássico

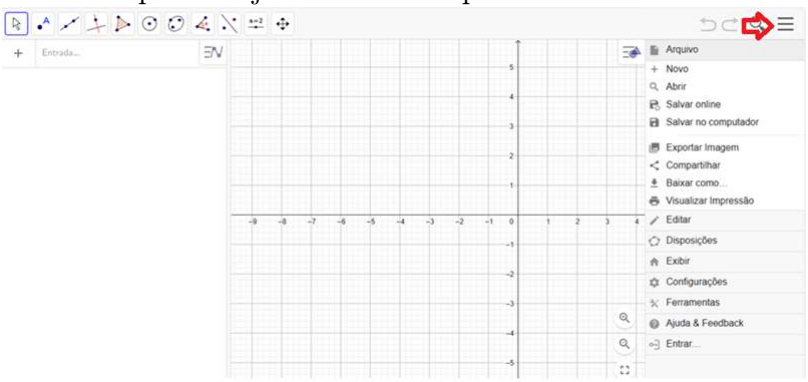
Antes de apresentar as etapas de construção do modelo logístico para a população de Teófilo Otoni – MG no período analisado, é fundamental expor os procedimentos para os ajustes linear e exponencial por meio do método dos mínimos quadrados, utilizando o GeoGebra Clássico.

Revista Multidisciplinar do Nordeste Mineiro, v.14, 2025
ISSN: 2178-6925
DOI: 10.61164/b6c43447

Essa abordagem permitirá que os alunos comparem os resultados obtidos e apliquem esse conhecimento na construção do modelo logístico . A seguir, apresentamos o passo a passo, acompanhado de imagens para facilitar a assimilação do conteúdo.

Passo 1: Com o GeoGebra aberto na janela inicial, clique no ícone Menu como indicado na Figura 3 a seguir.

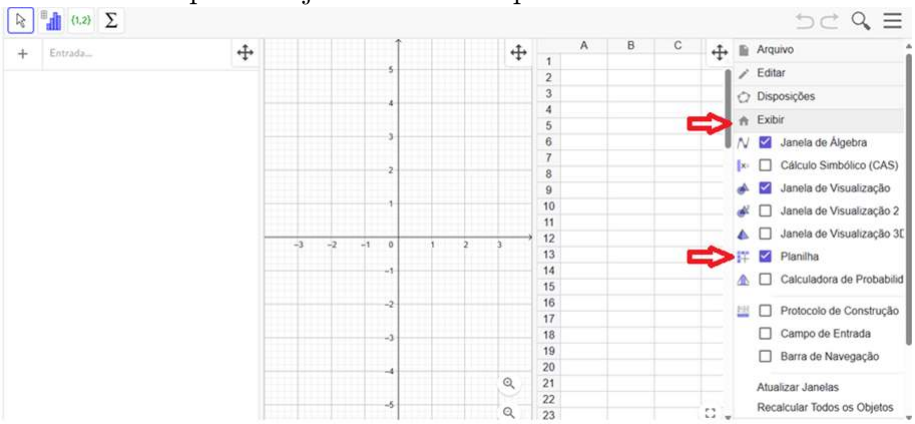
Figura 3: Passo 1 para o ajuste linear simples usando o GeoGebra Clássico.



Fonte: Autoria Própria.

Passo 2: Feito o passo 1, aparecerá uma janela a direita com várias opções. Clique no botão Exibir e em seguida no botão planilha como indicado na Figura 4, a seguir.

Figura 4: Passo 2 para o ajuste linear simples usando o GeoGebra Clássico.

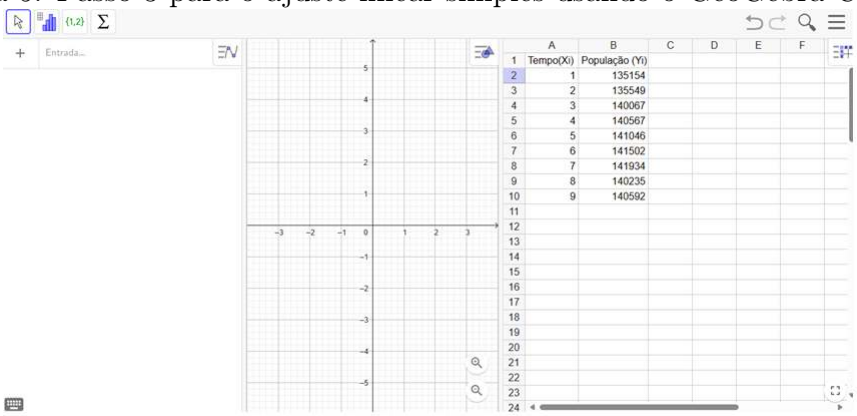


Fonte: Autoria Própria.

Passo 3: Feito o passo 2, aparecerá uma janela constando uma planilha para inserção de dados. Copie os dados (x_i, y_i) da tabela original ou introduza manualmente os dados na planilha, conforme a Figura 5, a seguir.

Revista Multidisciplinar do Nordeste Mineiro, v.14, 2025
ISSN: 2178-6925
DOI: 10.61164/b6c43447

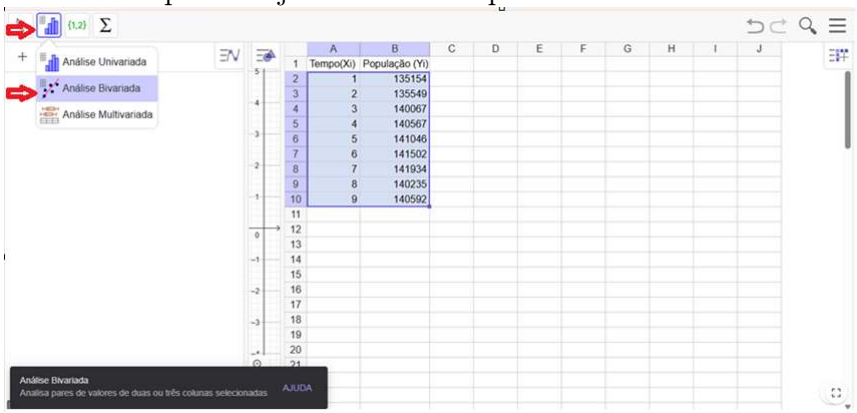
Figura 5: Passo 3 para o ajuste linear simples usando o GeoGebra Clássico.



Fonte: Autoria Própria.

Passo 4: Feito o passo 3, com o mouse selecione as entradas das duas colunas (x_i) e (y_i), clique no ícone indicado e escolha a opção Análise Bivariada, como se vê na Figura 6, a seguir.

Figura 6: Passo 4 para o ajuste linear simples usando o GeoGebra Clássico.

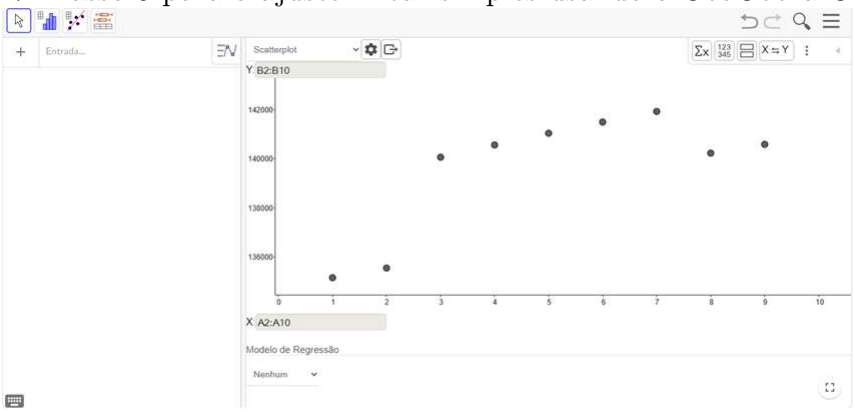


Fonte: Autoria Própria.

Revista Multidisciplinar do Nordeste Mineiro, v.14, 2025
ISSN: 2178-6925
DOI: 10.61164/b6c43447

Passo 5: Feito o passo 4, aparecerá um diagrama de dispersão dos pontos da relação do problema, como evidencia a Figura 7, a seguir.

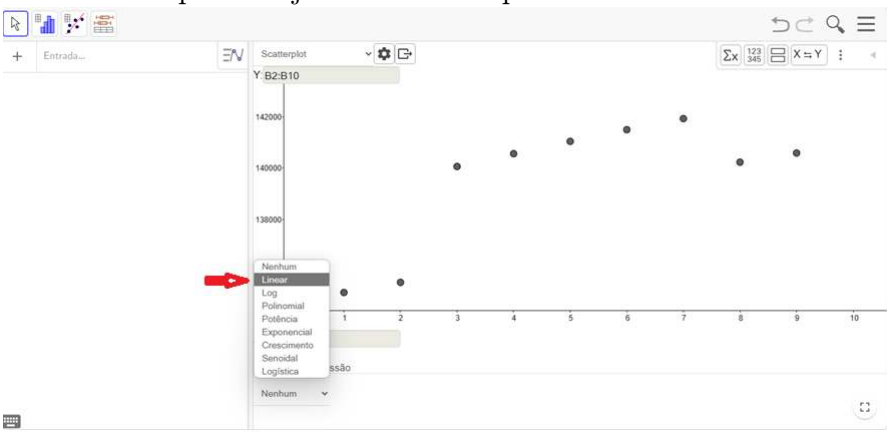
Figura 7: Passo 5 para o ajuste linear simples usando o GeoGebra Clássico.



Fonte: Autoria Própria.

Passo 6: Feito o passo 5, na janela de apresentação do diagrama de dispersão clique em Modelo de Regressão, na parte inferior da janela, e escolha a opção Linear, para que você tenha acesso às informações do ajuste, conforme mostra a Figura 8, a seguir.

Figura 8: Passo 6 para o ajuste linear simples usando o GeoGebra Clássico.

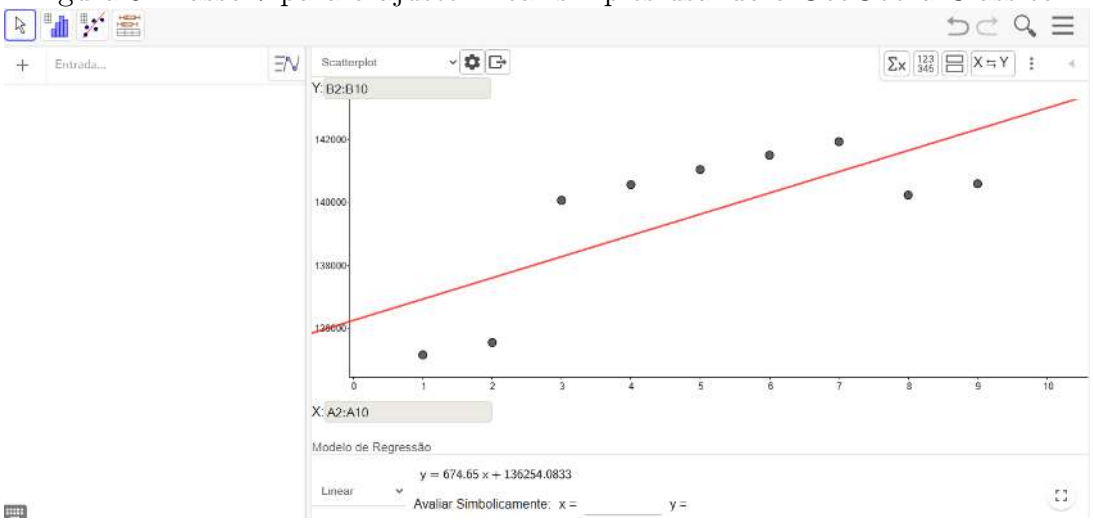


Fonte: Autoria Própria.

Revista Multidisciplinar do Nordeste Mineiro, v.14, 2025
ISSN: 2178-6925
DOI: 10.61164/b6c43447

Passo 7: Feito o passo 6, você tem acesso ao gráfico do ajuste no diagrama de dispersão e a fórmula matemática do ajuste linear simples referente a população teófilo-otonense no período de 2011 a 2019, que deu exatamente igual a equação **(4.4)**, $y = 674,65x + 136.254,0833$, conforme mostra a Figura 9, a seguir.

Figura 9: Passo 7 para o ajuste linear simples usando o GeoGebra Clássico.



Fonte: Autoria Própria.

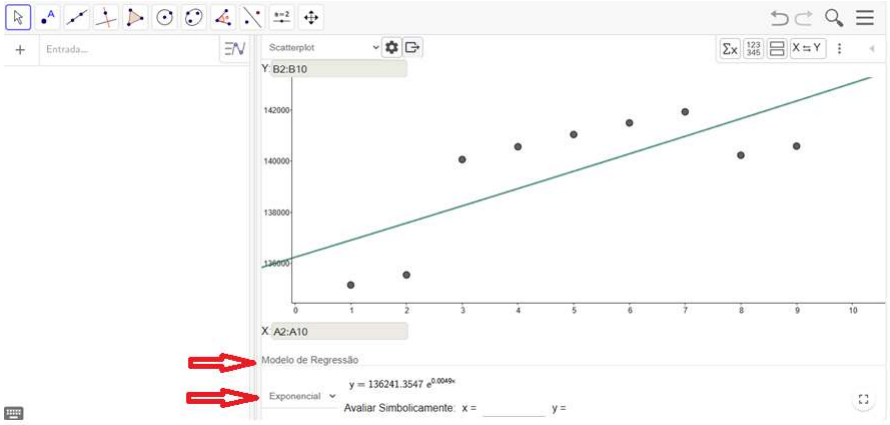
4.5 Modelo exponencial da evolução da população teófilo-otonense no período de 2011 a 2019 pelo GeoGebra Clássico.

O passo a passo já foi explicado na seção anterior, e aqui vamos direto para o Passo 7, fase em que o aluno deverá escolher, após clicar em 'Modelo de Regressão', a opção 'Exponencial.

Efetuando isso, temos como resultado o que podemos visualizar na Figura 10 a seguir.

Revista Multidisciplinar do Nordeste Mineiro, v.14, 2025
ISSN: 2178-6925
DOI: 10.61164/b6c43447

Figura 10: Passo 7 para o ajuste exponencial usando o GeoGebra Clássico.



Fonte: Autoria Própria.

Observe que, ao escolher a opção Exponencial, você teve acesso ao modelo de ajuste exponencial da população de Teófilo Otoni – MG no período de 2011 a 2019, onde a expressão **(4.5)** é dada por $y = 136.241,3547e^{0,0049x}$. Podemos perceber uma ligeira diferença de onze habitantes a mais no valor de b, obtido em **(4.11)**, devido às aproximações dos valores de $\ln(y_i)$ utilizadas na resolução do sistema **(4.8)** e ao arredondamento aplicado no emprego do GeoGebra Clássico.

Desta forma, uma vez que o aluno tenha assimilado o uso do GeoGebra para obter modelos matemáticos, podemos avançar e realizar as rotinas para obter o modelo logístico da evolução da população de Teófilo Otoni – MG no período de estudo.

4.6 Ajuste por modelo logístico

O ajuste de curva para o modelo logístico é dado pela expressão

$$y = \frac{K}{1 + be^{ax}};\ a < 0, \qquad \textbf{(4.12)}$$

onde K é o parâmetro que representa a capacidade suporte da população estudada, haja vista que após um determinado intervalor de tempo o número de indivíduos da população tende a estabilizar, a é taxa de crescimento e b é uma constante.

A primeira dificuldade que surge é estimar qual é a capacidade suporte (K) da população em estudo, neste caso do município de Teófilo Otoni – MG. Aqui vamos utilizar o método Ford-Walford (BERTONE et al., 2019, p. 73).

Por este modelo pressupõe que, uma vez estando em equilíbrio a população não varia mais . Assim , a estimativa deste valor limite K pode ser obtida relacionando os valores das populações nos instantes i e $i + 1$.

Revista Multidisciplinar do Nordeste Mineiro, v.14, 2025
ISSN: 2178-6925
DOI: 10.61164/b6c43447

Para que o método Ford-Walfor forneça uma estimativa razoável para o valor de K é conveniente considerar apenas os valores em que a taxa de crescimento apresenta redução. Observando a Tabela 1, constata-se que isto ocorre no período de 2013 a 2017.

Tabela 4: Crescimento relativo da População de Teófilo Otoni – MG no período 2012-2019.

Ano	**População** (y_i)	**Crescimento relativo**
2011	135.154	$\frac{135549-135154}{135154}=0,0029225$
2012	135.549	$\frac{140067-135549}{135549}=0,0333311$
2013	140.067	$\frac{140567-140067}{140067}=0,0035697$
2014	140.567	$\frac{141046-140567}{140567}=0,0034076$
2015	141.046	$\frac{141502-141046}{141046}=0,0032329$
2016	141.502	$\frac{141934-141502}{141502}=0,0030529$
2017	141.934	$\frac{140235-141934}{141934}=-0,0119703$
2018	140.235	$\frac{140592-140235}{140235}=0,0025457$
2019	140.592	-

Fonte: Autoria Própria - Dados de Projeções Demográficas - IBGE.

A partir dos pontos obtidos, ajusta-se uma função g para os pares (y_i, y_{i+1}), isto é, $g(y_i) = y_{i+1}$, nesse caso temos uma juste linear simples, que aqui será obtido utilizando o GeoGebra Clássico, mas que também poderia ser encontrado aplicando o método dos mínimos quadrados.

Destarte, para facilitar a realização das rotinas constantes na subseção **4.2**, utilizando o GeoGebra Clássico é oportuno construir a Tabela 5.

Tabela 5: Ajuste Logístico da População de Teófilo Otoni – MG.

Ano	x_i	**População**(y_i)	$g(y_i) = y_{i+1}$	$Y = \ln(\frac{K-y_i}{y_i})$
2013	1	140.067	140.567	-3,96006
2014	2	140.567	141.046	-4,17098
2015	3	141.046	141.502	-4,42379
2016	4	141.502	141.934	-4,74128
2017	5	141.934	141.934	-5,17483

Fonte: Autoria Própria - Dados de Projeções Demográficas - IBGE.

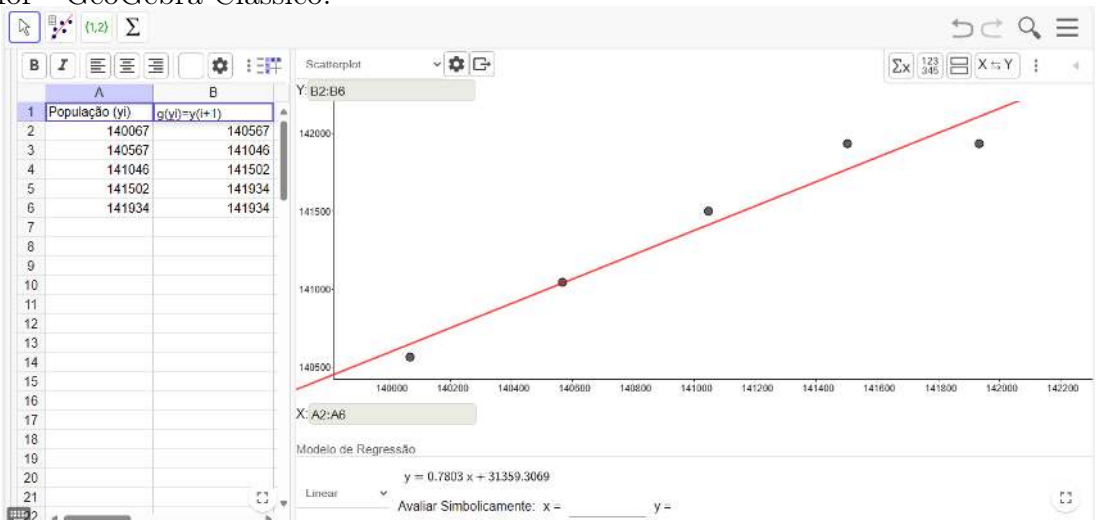
Revista Multidisciplinar do Nordeste Mineiro, v.14, 2025
ISSN: 2178-6925
DOI: 10.61164/b6c43447

Fazendo o ajuste no GeoGebra da lista de dados (y_i, y_{i+1}), seguindo os mesmos passos da subseção **4.4** e escolhendo no passo 6 a opção Linear, obtêm-se o ajuste polinomial de primeiro grau

$$g(y) = 0,7803y + 31.359,3069,$$

como mostra a Figura 11.

Figura 11: Ajuste polinomial linear da população (y_i) e $g(y_i) = y_{i+1}$ para o método Ford-Walfor - GeoGebra Clássico.

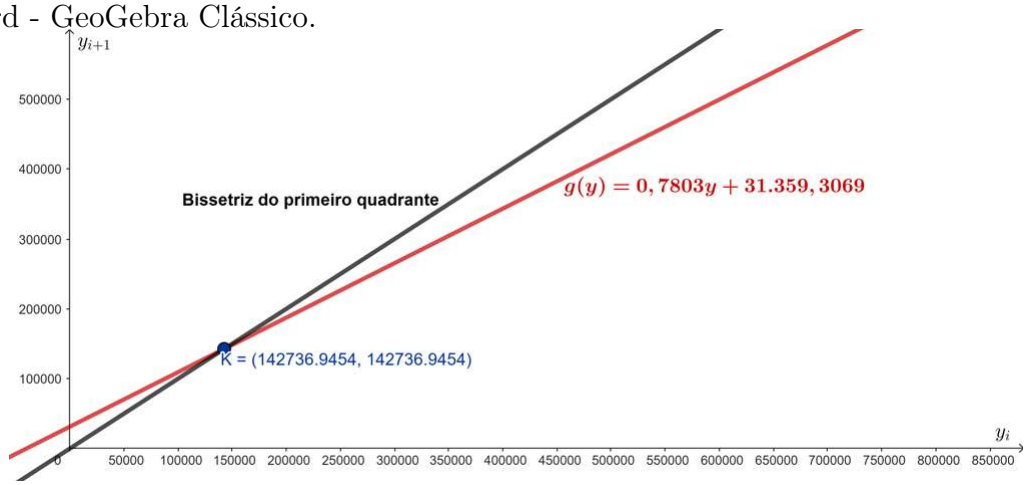


Fonte: Autoria Própria.

Para encontrarmos o valor de K, usamos o GeoGebra construindo a Figura a seguir.

Revista Multidisciplinar do Nordeste Mineiro, v.14, 2025
ISSN: 2178-6925
DOI: 10.61164/b6c43447

Figura 12: Capacidade Suporte da População de Teófilo Otoni - MG: Método de Ford-Walford - GeoGebra Clássico.



Fonte: Autoria Própria.

Observe que o valor encontrado para a capacidade suporte da população de Teófilo Otoni – MG foi de $K = 142.736,9454$. Isso foi feito geometricamente, encontrando a interseção de $g(y) = 0,7803y + 31.359,3069$ e a bissetriz do primeiro quadrante, que corresponde a resolver a equação $g(y) = y$, vide Lima (2004), ou seja,

$$y = 0,7803y + 31.359,3069. \qquad \textbf{(4.13)}$$

Portanto, resolvendo a equação **(4.13)**, encontramos

$$K = y = \frac{31.359,3069}{1 - 0,7803} = 142.736,9454.$$

Determinado o valor da população limite K, passamos agora obter os parâmetros a e b do modelo **(4.12)**. Para ser possível fazer a linearização do modelo logístico **(4.2)**, que é equivalente para $y > 0$ segue que

$$\frac{K - y}{y} = be^{ax},$$

e aplicando o logaritmo neperiano a ambos os membros obtemos que

$$ln\left(\frac{K - y}{y}\right) = ln(b) + ax.$$

Revista Multidisciplinar do Nordeste Mineiro, v.14, 2025
ISSN: 2178-6925
DOI: 10.61164/b6c43447

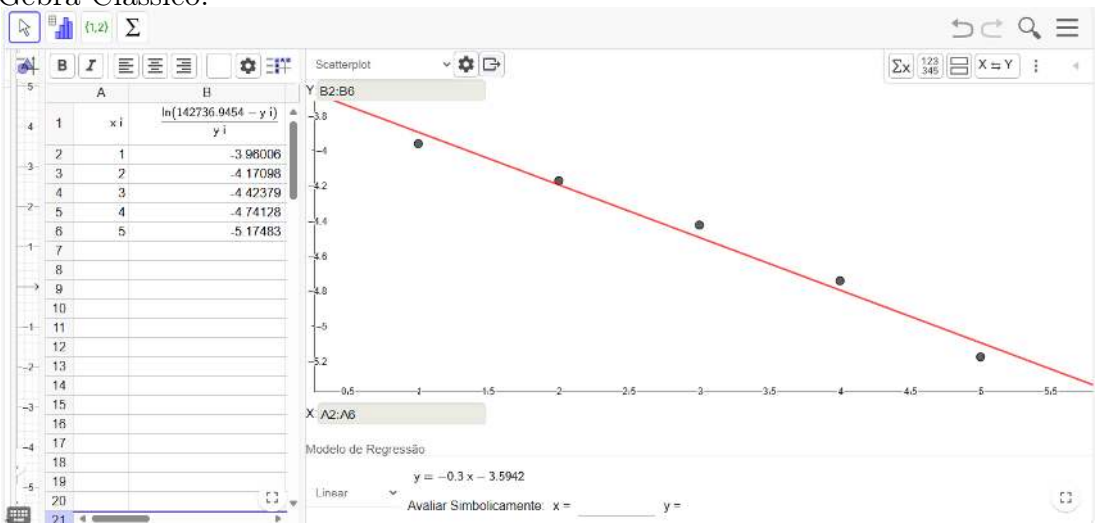
Assim, fazendo uma mudança de variável

$$Y = ln\left(\frac{K-y}{y}\right),$$

obtemos a linearização que é dada por $Y = ln(b) + ax$.

Logo, utilizando a Tabela 5, efetuado os procedimentos para o ajuste no GeoGebra da lista de dados $\left[x_i, Y_i = ln\left(\frac{K-y_i}{y_i}\right)\right]$, seguindo os mesmos passo da subseção **(4.4)** e escolhendo novamente no passo 6 a opção Linear, obtêm-se como resultado a regressão de análise da Figura 13.

Figura 13: O resultado do ajuste linear dos dados (x_i, Y_i) - Método de Ford-Walfor - GeoGebra Clássico.



Fonte: Autoria Própria.

Conforme as informações do ajuste linear da Figura 13, obtemos a equação

$$Y = ax + ln(b) = -0,3x - 3,5942.$$

Assim, encontramos $a = -0,3$ e fazendo a mudança de base em b temos

$$b = e^{-3,5942} \Rightarrow b = 0,02748.$$

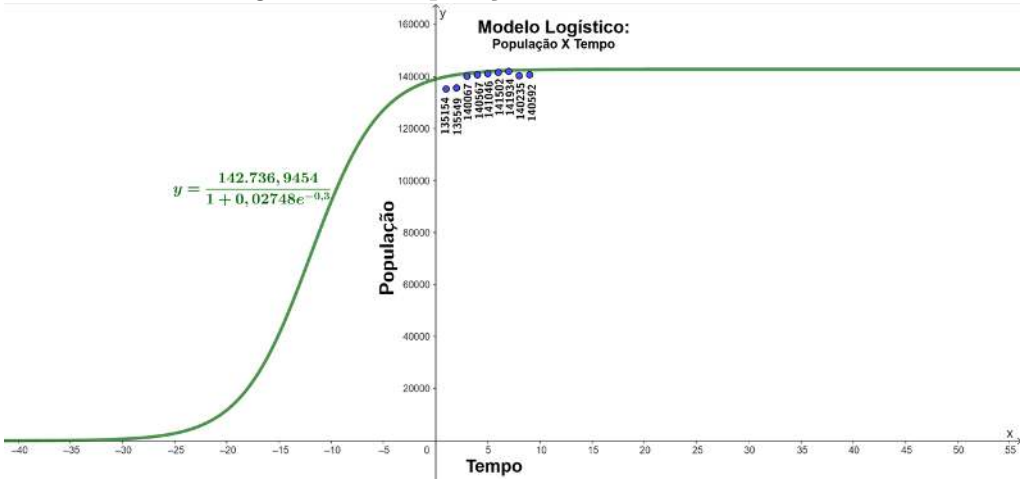
Revista Multidisciplinar do Nordeste Mineiro, v.14, 2025
ISSN: 2178-6925
DOI: 10.61164/b6c43447

Outrossim substituindo os valores de K, a e b na equação **(4.12)**, obtemos como modelo do ajuste logístico para a população de Teófilo Otoni – MG no período de estudo a expressão

$$y = \frac{142.736,9454}{1 + 0,02748e^{-0,3}}.$$

O gráfico da Figura 14 mostra à dispersão dos pontos e a curva referente ao modelo de ajuste logístico da população de Teófilo Otoni de 2011 a 2019.

Figura 14: Modelo Logístico da População de Teófilo Otoni - MG de 2011 a 2019.



Fonte: Autoria Própria.

Finalizada a etapa da matematização, sugerimos que o aluno passe para a terceira e última fase, que é o Modelo Matemático e suas subetapas: interpretação e resolução. Essa fase busca, de certa forma, validar os modelos, o que pode ser feito por meio da comparação entre os modelos, apurando e analisando os erros obtidos em relação aos dados reais projetados pelo IBGE no período de realização dos ajustes (2011 a 2019), e também com os dados mais atuais, incluindo os verificados no censo demográfico de 2022.

Diante disso, apresentamos a comparação sugerida entre os modelos obtidos para a população de Teófilo Otoni – MG no período de estudo e nos anos de 2020, 2021 e 2022, a fim de indicar uma possibilidade para que o aluno avalie os modelos e discuta aquele que melhor poderia ser utilizado para projetar a população de sua cidade ao longo do tempo.

Revista Multidisciplinar do Nordeste Mineiro, v.14, 2025
ISSN: 2178-6925
DOI: 10.61164/b6c43447

4.7 Análise dos Modelos

A análise e a interpretação dos modelos foram feitas por meio de uma comparação básica entre os três modelos, a partir do cálculo do erro entre a diferença dos valores reais e os valores estimados pelos modelos, possibilitando um estudo mais crítico sobre as expressões matemáticas de cada modelo. Os resultados dos modelos: linear , exponencial e logístico estão contidos nas Tabelas 6 e 7.

Tabela 6: Erro entre os valores obtidos pelos modelos e as projeções apresentadas pelo IBGE de 2011 a 2019 (período de realização dos ajustes).

x_i	**Ano**	**Linear**	$\|Erro\|$	**Exponencial**	$\|Erro\|$	**Logístico**	$\|Erro\|$	**Observado**
1	2011	136928,73	1774,73	136849,17	1695,17	139889,12	4735,12	135154
2	2012	137603,38	2054,38	137571,62	2022,62	140616,26	5067,26	135549
3	2013	138278,03	1788,97	138608,86	1458,14	141159,83	1092,83	140067
4	2014	138952,68	1614,32	138926,45	1640,55	141565,23	998,23	140567
5	2015	139627,33	1418,67	139608,86	1437,14	141867,07	821,07	141046
6	2016	140301,98	1200,02	140294,63	1207,37	142091,50	589,50	141502
7	2017	140976,63	957,37	140983,76	950,24	142253,57	319,57	141934
8	2018	141651,28	1416,28	141676,27	1441,27	142381,99	2146,99	140235
9	2019	142325,93	1733,93	142372,19	1780,19	142473,82	1881,82	140592

Fonte: Autoria Própria.

Tabela 7: Erro entre os valores obtidos pelos modelos e as projeções apresentadas pelo IBGE de 2020 e 2021 e Censo de 2022.

x_i	**Ano**	**Linear**	$\|Erro\|$	**Exponencial**	$\|Erro\|$	**Logístico**	$\|Erro\|$	**Observado**
10	2020	143000,58	2063,58	143071,53	2134,53	142541,92	1604,92	140937
11	2021	143675,23	2406,23	143774,30	2505,30	142592,42	1323,42	141269
12	2022	144349,88	6931,88	144480,52	7062,52	142629,85	5211,85	137418[1]

Fonte: Autoria Própria.

Observe que, na Tabela 6, referente ao período de realização dos ajustes (2011 a 2019), o modelo que mais se repete como o de menor erro dos dados projetados pelo IBGE é o logístico.

[1]População de Teófilo Otoni - MG conforme o Censo Demográfico de 2022.

Revista Multidisciplinar do Nordeste Mineiro, v.14, 2025
ISSN: 2178-6925
DOI: 10.61164/b6c43447

Percebe-se ainda que, em quatro anos, o modelo linear (2011 e 2012) e o exponencial (2018 a 2019) são os que mais se aproximaram dos valores reais, indicando que, no curto prazo, até poderiam ser considerados adequados. Contudo, em virtude de ambos admitirem um crescimento ilimitado, o que não é razoável em longo prazo para populações, tornam-se inadequados para projeções populacionais futuras. Além disso, o fato de os erros do modelo logístico não serem absurdamente diferentes dos erros dos modelos linear (2011 e 2012) e exponencial (2018 e 2019) corrobora a tese da população limite calculada no modelo logístico.

Vale observar que a interpretação da Tabela 7 reforça o fato de que o modelo logístico é o mais adequado para representar a evolução da população teófilo-otonense ao longo dos anos, uma vez que, tanto nas projeções feitas pelo IBGE nos anos de 2020 e 2021, quanto no resultado apurado pelo Censo de 2022, este foi o modelo que apresentou o menor erro entre os três elaborados.

Cabe enfatizar aos alunos que a construção de modelos sobre dinâmica e evolução populacional, especialmente os modelos logísticos, depende da inserção de suposições específicas, variáveis e condições ambientais. Esse tema é aprofundado no Capítulo 6 do livro de Rodney Carlos Bassanezi (2002), Ensino-aprendizagem com modelagem matemática. O objetivo deste trabalho foi, por meio do Método dos Mínimos Quadrados e com base na coleta de dados, construir modelos algébricos que caracterizam as funções afim e exponencial, estudadas no ensino médio, propondo um caminho diferente para a aplicação desses conteúdos em sala de aula e reforçando a importância da matemática no estudo de fenômenos e problemas reais.

5 Considerações Finais

Esperamos que este estudo contribua significativamente para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática no Ensino Médio. Apresentamos a modelagem matemática, por meio do ajuste de curvas utilizando o método dos mínimos quadrados, como uma abordagem atrativa e eficaz para o estudo das funções polinomiais de 1^{o} e 2^{o} graus, bem como das funções exponenciais. Essa metodologia permite que os alunos deduzam parâmetros e coeficientes das expressões matemáticas que representam os modelos obtidos, além de construir e interpretar os respectivos gráficos.

O problema do crescimento populacional foi analisado com base em dados públicos do IBGE referentes ao município de Teófilo Otoni – MG. A partir desse estudo, identificamos uma oportunidade de introduzir e explorar conceitos matemáticos do Ensino Médio em um contexto real, evidenciando como esses conhecimentos podem ser trabalhados de forma construtivista, proporcionando mais significado ao aprendizado dos alunos.

ISSN: 2178-6925
DOI: 10.61164/b6c43447

Além disso, é fundamental que o professor possua conhecimentos básicos sobre o uso do aplicativo GeoGebra, pois essa ferramenta auxilia na verificação e validação das expressões analíticas obtidas, na construção de gráficos representativos e na comparação das curvas dos modelos matemáticos elaborados durante a resolução do problema.

Por fim, destacamos que a modelagem matemática facilita a integração entre pesquisa e ensino, devido ao seu caráter investigativo. Dessa forma, este trabalho pode ser um recurso valioso para o professor tanto em suas aulas regulares quanto no desenvolvimento de projetos, já que a atividade proposta incentiva a análise de padrões, projeções e previsões do crescimento populacional.

Referências

[1] BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. [S.l.]: Editora Contexto, 2002.

[2] BIEMBENGUT, M. S. *Modelagem matemática implicações no ensino e na aprendizagem de matemática*. [S.l.]: Ed. da FURB, 2004.

[3] BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília-DF: MEC, Secretaria de Educação Básica, 2017.

[4] BURAK, D. Modelagem matemática e a sala de aula. *Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática*, v. 1, n. 1, p. 10, 2004.

[5] CRATO, N. O papel dos mínimos quadrados na descoberta dos planetas. *Researchgate.net*, 2000.

[6] EDUCAÇÃO, B. *Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais para a Educação Básica*. 2010.

[7] FILHO, E. L. *Modelos matemáticos nas ciências não exatas: um volume em homenagem a Euclydes Custódio de Lima Filho*. São Paulo: Blucher, 2008.

[8] GERAIS, M. *Currículo de Referência de Minas Gerais (CRMG)*. Belo Horizonte: Comissão Estadual para Implementação da Base Nacional Comum Curricular, v. 19, 2018.

[9] LIMA, E. L. *Análise Real*. [S.l.]: IMPA, Rio de Janeiro, 2004.

[10] IBGE. Estimativas da população do Brasil e das unidades da federação, 2023. Disponível em: `https://www.ibge.gov.br/apps/populacao/projecao`. Acesso em: 2024.

ISSN: 2178-6925
DOI: 10.61164/b6c43447

[11] SILVEIRA, A.; FERREIRA, G. P.; SILVA, L. A. da. A evolução da modelagem matemática ao longo da história, o surgimento da modelagem no Brasil e suas contribuições enquanto estratégia de ensino de matemática. *Actas del VII CIBEM*, ISSN 2301-0797, p. 2875, 2013.