REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 17/06/2026 - **Accepted:** 25/07/2026
Vol: 13.17
DOI: 10.66104/zqtzej92
Pages: 1-18

APLICAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE LORENZ NA MACROECONOMIA: CAOS, ATRACTORES E DINÂMICA ECONÔMICA

APPLICATION OF LORENZ EQUATIONS IN MACROECONOMICS: CHAOS, ATTRACTORS, AND ECONOMIC DYNAMICS

APLICACIÓN DE LAS ECUACIONES DE LORENZ EN MACROECONOMÍA: CAOS, ATRACTORES Y DINÁMICA ECONÓMICA.

Paulo Salgado Zenha Carneiro
Mestre em Engenharia de Processos, Universidade Federal do Pará, Brasil
E-mail: paulozenha@outlook.com

Raimundo Luna Neres
Doutor em Matemática, Universidade Estadual Paulista UNESP, Brasil
E-mail: raimundolunaneres@gmail.com

Patrício Moreira de Araújo Filho
Doutor em Engenharia Mecânica, Universidade Estadual Paulista UNESP, Brasil
E-mail: pmaraujof@yahoo.com.br

Resumo

Este artigo investiga a aplicação das equações de Lorenz – originalmente formuladas para modelar convecção atmosférica – no âmbito da macroeconomia, com foco na análise de sistemas econômicos complexos, não lineares e caóticos. A pesquisa parte do pressuposto de que a dinâmica macroeconômica, caracterizada por interações múltiplas, retroalimentações e sensibilidade às condições iniciais, pode ser representada por sistemas de equações diferenciais não lineares análogas às de Lorenz. O objetivo principal é explorar como o formalismo do caos determinístico e o conceito de atrator estranho podem ser utilizados para modelar flutuações econômicas endógenas, ciclos de negócios e crises financeiras, indo além das explicações tradicionais baseadas em choques exógenos. A metodologia empregada envolve revisão sistemática da literatura interdisciplinar, análise comparativa de modelos econômicos não lineares e simulações numéricas das equações de Lorenz com parâmetros adaptados a variáveis econômicas hipotéticas (ex: produção, inflação, taxa de juros). Os resultados indicam que o sistema de Lorenz, quando transposto metaforicamente e com ajustes estruturais, é capaz de gerar trajetórias irregulares e recorrentes que mimetizam padrões observados em séries temporais macroeconômicas, como a aparente aleatoriedade de ciclos e a persistência de volatilidade. A discussão aprofunda as limitações e potenciais dessa abordagem, argumentando que a teoria do

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 17/06/2026 - **Accepted:** 25/07/2026
Vol: 13.17
DOI: 10.66104/zqtzej92
Pages: 1-18

caos oferece ferramentas para entender a emergência de instabilidade a partir de regras determinísticas simples, questionando paradigmas de equilíbrio estável. Conclui-se que, embora a aplicação direta e literal das equações de Lorenz seja limitada, o arcabouço teórico do caos e a identificação de atratores em espaços de fase econômicos constituem um programa de pesquisa promissor para a macroeconomia, sugerindo a necessidade de modelos que incorporem não linearidades e dinâmicas complexas para melhor capturar a realidade econômica.

Palavras-chave: Equações de Lorenz; Macroeconomia; Teoria do Caos; Atrator Estranho; Sistemas Dinâmicos Não Lineares; Ciclos Econômicos.

Abstract

This article investigates the application of the Lorenz equations – originally formulated to model atmospheric convection – in macroeconomics, focusing on the analysis of complex, non-linear, and chaotic economic systems. The research assumes that macroeconomic dynamics, characterized by multiple interactions, feedback loops, and sensitivity to initial conditions, can be represented by systems of non-linear differential equations analogous to those of Lorenz. The main objective is to explore how the formalism of deterministic chaos and the concept of a strange attractor can be used to model endogenous economic fluctuations, business cycles, and financial crises, going beyond traditional explanations based on exogenous shocks. The methodology employed involves a systematic review of interdisciplinary literature, a comparative analysis of non-linear economic models, and numerical simulations of the Lorenz equations with parameters adapted to hypothetical economic variables (e.g., output, inflation, interest rates). The results indicate that the Lorenz system, when metaphorically transposed and with structural adjustments, can generate irregular and recurrent trajectories that mimic patterns observed in macroeconomic time series, such as the apparent randomness of cycles and the persistence of volatility. The discussion deepens the limitations and potential of this approach, arguing that chaos theory offers tools to understand the emergence of instability from simple deterministic rules, questioning stable equilibrium paradigms. It is concluded that, although the direct and literal application of the Lorenz equations is limited, the theoretical framework of chaos and the identification of attractors in economic phase spaces constitute a promising research program for macroeconomics, suggesting the need for models that incorporate nonlinearities and complex dynamics to better capture economic reality.

Keywords: Lorenz equations; Macroeconomics; Chaos theory; Strange attractor; Nonlinear dynamical systems; Business cycles.

Resumen

Este artículo investiga la aplicación de las ecuaciones de Lorenz —formuladas originalmente para

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 17/06/2026 - **Accepted:** 25/07/2026
Vol: 13.17
DOI: 10.66104/zqtzej92
Pages: 1-18

modelar la convección atmosférica— en la macroeconomía, centrándose en el análisis de sistemas económicos complejos, no lineales y caóticos. La investigación parte de la premisa de que la dinámica macroeconómica, caracterizada por múltiples interacciones, bucles de retroalimentación y sensibilidad a las condiciones iniciales, puede representarse mediante sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales análogos a los de Lorenz. El objetivo principal es explorar cómo el formalismo del caos determinista y el concepto de atractor extraño pueden utilizarse para modelar fluctuaciones económicas endógenas, ciclos económicos y crisis financieras, superando así las explicaciones tradicionales basadas en choques exógenos. La metodología empleada incluye una revisión sistemática de literatura interdisciplinaria, un análisis comparativo de modelos económicos no lineales y simulaciones numéricas de las ecuaciones de Lorenz con parámetros adaptados a variables económicas hipotéticas (por ejemplo, producción, inflación y tasas de interés). Los resultados indican que el sistema de Lorenz, al ser trasladado metafóricamente y sometido a ajustes estructurales, puede generar trayectorias irregulares y recurrentes que emulan patrones observados en series temporales macroeconómicas, tales como la aparente aleatoriedad de los ciclos y la persistencia de la volatilidad. La discusión profundiza en las limitaciones y el potencial de este enfoque, argumentando que la teoría del caos ofrece herramientas para comprender el surgimiento de la inestabilidad a partir de reglas deterministas simples, cuestionando así los paradigmas de equilibrio estable. Se concluye que, si bien la aplicación directa y literal de las ecuaciones de Lorenz resulta limitada, el marco teórico del caos y la identificación de atractores en espacios de fase económicos constituyen un programa de investigación prometedor para la macroeconomía, lo que sugiere la necesidad de modelos que incorporen no linealidades y dinámicas complejas para captar mejor la realidad económica.

Palabras clave: Ecuaciones de Lorenz; Macroeconomía; Teoría del caos; Atractor extraño; Sistemas dinámicos no lineales; Ciclos económicos.

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 17/06/2026 - **Accepted:** 25/07/2026
Vol: 13.17
DOI: 10.66104/zqtzej92
Pages: 1-18

1. Introdução

A macroeconomia clássica e a síntese neoclássica tradicionalmente fundamentam-se na noção de equilíbrio estável, tendências suaves e respostas lineares a choques externos. No entanto, a história econômica revela um panorama diferente: flutuações irregulares, crises abruptas, ciclos de variada duração e amplitude, e uma aparente imprevisibilidade que resiste a explicações simplistas por fatores exógenos. Essa discrepância entre teoria e realidade tem impulsionado, desde a segunda metade do século XX, a busca por abordagens alternativas que possam capturar a complexidade inerente aos sistemas econômicos. Paralelamente, em outros campos do conhecimento, como a meteorologia e a física, desenvolvia-se uma revolução conceitual: a teoria do caos. Edward Lorenz (1963), ao estudar um sistema simplificado para convecção atmosférica, descobriu que um conjunto determinístico de três equações diferenciais não lineares podia gerar um comportamento extremamente irregular, sensível às condições iniciais – o "efeito borboleta". Esse sistema exibia um objeto geométrico no espaço de fase, o *atrator estranho de Lorenz*, que organizava a dinâmica de forma complexa e não periódica.

A transposição de conceitos da teoria do caos para as ciências sociais, em particular para a economia, começou a ganhar força nas décadas de 1980 e 1990. Pesquisadores como Benhabib, Day, Grandmont e Brock, entre outros, exploraram como não linearidades em modelos econômicos simples podiam levar a dinâmicas caóticas, sugerindo que a flutuação endógena, e não apenas choques externos, poderia ser a origem dos ciclos de negócios.

Nesse contexto, este artigo se propõe a investigar especificamente a aplicação das equações de Lorenz na macroeconomia. **A pergunta central que orienta a pesquisa é: De que forma o formalismo matemático e os insights conceituais derivados do sistema de Lorenz podem ser úteis para modelar e compreender a dinâmica macroeconômica complexa?**

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 17/06/2026 - **Accepted:** 25/07/2026
Vol: 13.17
DOI: 10.66104/zqtzej92
Pages: 1-18

1.1 Objetivos

O objetivo geral é analisar as potencialidades e limitações dessa aplicação. Os objetivos específicos incluem:

1. Revisar a literatura sobre caos em economia;
2. Apresentar as equações de Lorenz e seus significados na física e uma possível reinterpretação econômica;
3. Explorar, através de simulações e analogias, como variáveis macroeconômicas poderiam mapear-se no sistema;
4. Discutir os resultados à luz da teoria econômica;
5. Avaliar as implicações dessa perspectiva para a modelagem e a política econômica.

1.2 Relevância

A relevância deste estudo reside no seu caráter interdisciplinar, buscando ferramentas da matemática e da física para iluminar problemas econômicos persistentes. Ao fazê-lo, questiona-se a primazia dos modelos lineares de equilíbrio e abre-se espaço para uma visão da economia como um sistema adaptativo complexo, onde a instabilidade e a ordem coexistem.

A estrutura do artigo segue, além desta introdução, as seções de Referencial Teórico, onde se discute as bases conceituais; Metodologia, onde se detalha a abordagem metodológica; Análise e Resultados, que integra a apresentação dos achados das simulações; Discussão, com análise crítica dos resultados; e finalmente a Conclusão, que sintetiza as contribuições e aponta direções futuras.

2. Referencial Teórico

2.1 Teoria do Caos e Equações de Lorenz

A teoria do caos estuda o comportamento de sistemas dinâmicos não lineares que são altamente sensíveis às condições iniciais, um fenômeno popularmente conhecido como "efeito borboleta". Edward Lorenz (1963), ao

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 17/06/2026 - **Accepted:** 25/07/2026
Vol: 13.17
DOI: 10.66104/zqtzej92
Pages: 1-18

investigar modelos simplificados de convecção atmosférica, derivou um sistema de três equações diferenciais ordinárias que exibia esse comportamento:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x)\\ \frac{dy}{dt} &= x(\rho - z) - y\\ \frac{dz}{dt} &= xy - \beta z\end{aligned} \tag{1}$$

onde *x,y,z* são **variáveis de estado**, *t* é o tempo, e *σ*, *ρ*, *β* são parâmetros positivos.

Para valores específicos (como $\sigma = 10$, $\rho = 28$, $\beta = 8/3$), o sistema exibe comportamento caótico **com um atrator estranho de estrutura fractal.**

2.2 Aplicações do Caos em Economia

A aplicação da teoria do caos na economia ganhou impulso a partir dos trabalhos pioneiros de Benhabib e Day (1981), Day (1982) e Brock e Sayers (1988). Esses pesquisadores demonstraram que modelos econômicos simples com não linearidades podem gerar dinâmicas caóticas sem a necessidade de choques estocásticos externos. Esta perspectiva desafia a visão tradicional de que flutuações econômicas são necessariamente resultantes de fatores exógenos, sugerindo que a complexidade pode emergir endogenamente da estrutura do próprio sistema econômico.

2.3 Modelos Econômicos Não Lineares

Modelos como os de Kaldor (1940) para ciclos de negócios e Goodwin (1967) para conflito distributivo já incorporavam não linearidades que podiam gerar comportamento cíclico endógeno. A transposição do formalismo de Lorenz para a economia representa uma extensão desta linha de pesquisa, explorando como sistemas tridimensionais não lineares podem capturar interações complexas entre variáveis macroeconômicas.

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 17/06/2026 - **Accepted:** 25/07/2026
Vol: 13.17
DOI: 10.66104/zqtzej92
Pages: 1-18

3. Metodologia

3.1 Abordagem Geral

Esta pesquisa adota uma abordagem qualitativa e teórico-exploratória, com um componente quantitativo demonstrativo baseado em simulações numéricas. Não se trata de um estudo empírico para validação estatística de um modelo específico, mas de uma investigação conceitual sobre a transferência de um *framework* matemático entre disciplinas.

3.2 Revisão Sistemática da Literatura

Foi conduzida uma revisão não exaustiva, mas sistemática, da literatura pertinente em duas frentes principais:

1. Fundamentos da Teoria do Caos e Equações de Lorenz: Foram consultadas obras seminais de Edward Lorenz (1963), assim como textos didáticos sobre sistemas dinâmicos não lineares (e.g., STROGATZ, 1994; ALLIGOOD, SAUER & YORKE,
1996).

2. Caos em Economia: Foram analisados artigos fundacionais (e.g., BENHABIB & DAY, 1981; DAY, 1982; BROCK & SAYERS, 1988) e revisões mais recentes (e.g., ROSSER JR, 1999; BARNETT & SERLETIS, 2000) sobre a aplicação da teoria do caos em modelos econômicos, desde ciclos de negócios até finanças.

3.3 Interpretação Econômica das Equações de Lorenz

Para explorar uma possível aplicação econômica, adotamos uma estratégia de *transposição analógica* ou *metafórica*. Propõe-se a seguinte interpretação econômica hipotética:

- x - Hiato do Produto ou Taxa de Crescimento: Representa o desvio da produção em relação ao seu potencial ou sua taxa de variação.

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 17/06/2026 - **Accepted:** 25/07/2026
Vol: 13.17
DOI: 10.66104/zqtzej92
Pages: 1-18

- *y* - Hiato Inflacionário ou Expectativas de Inflação: Representa pressões de demanda ou expectativas inflacionárias.

- *z* - Taxa de Juros Real ou Nível de Endividamento: Representa o custo do capital ou um fator de restrição financeira.

3.4 Simulações Numéricas

Para ilustrar o comportamento do sistema e sua sensibilidade, **foram realizadas simulações numéricas utilizando o software *Python* (bibliotecas NumPy e SciPy para integração das EDOs, e Matplotlib para visualização).** Foram utilizados dois conjuntos de parâmetros:

1. Cenário Caótico: $\sigma = 10$, $\rho = 28$, $\beta = 8/3$ (os clássicos).

2. Cenário Não-Caótico (Convergência): $\sigma = 10$, $\rho = 10$, $\beta = 8/3$.

Para cada cenário, as equações foram integradas numericamente (método de Runge-Kutta de 4ª ordem) a partir de duas condições iniciais muito próximas. As trajetórias temporais de $x(t)$ e a projeção do atrator no plano x-y foram plotadas para análise comparativa.

Para geração dos gráficos foi utilizado Python 3.9 com pacotes statsmodels, linearmodels e scipy (MCKINNEY, 2024)

3.5 Análise Comparativa

A estrutura do sistema de Lorenz foi comparada com modelos macroeconômicos não lineares conhecidos, como os modelos de ciclos de negócios de Kaldor (1940) e Goodwin (1967), que também utilizam equações diferenciais não lineares acopladas para gerar flutuações endógenas.

REMUNOM
ISSN 2178-6925

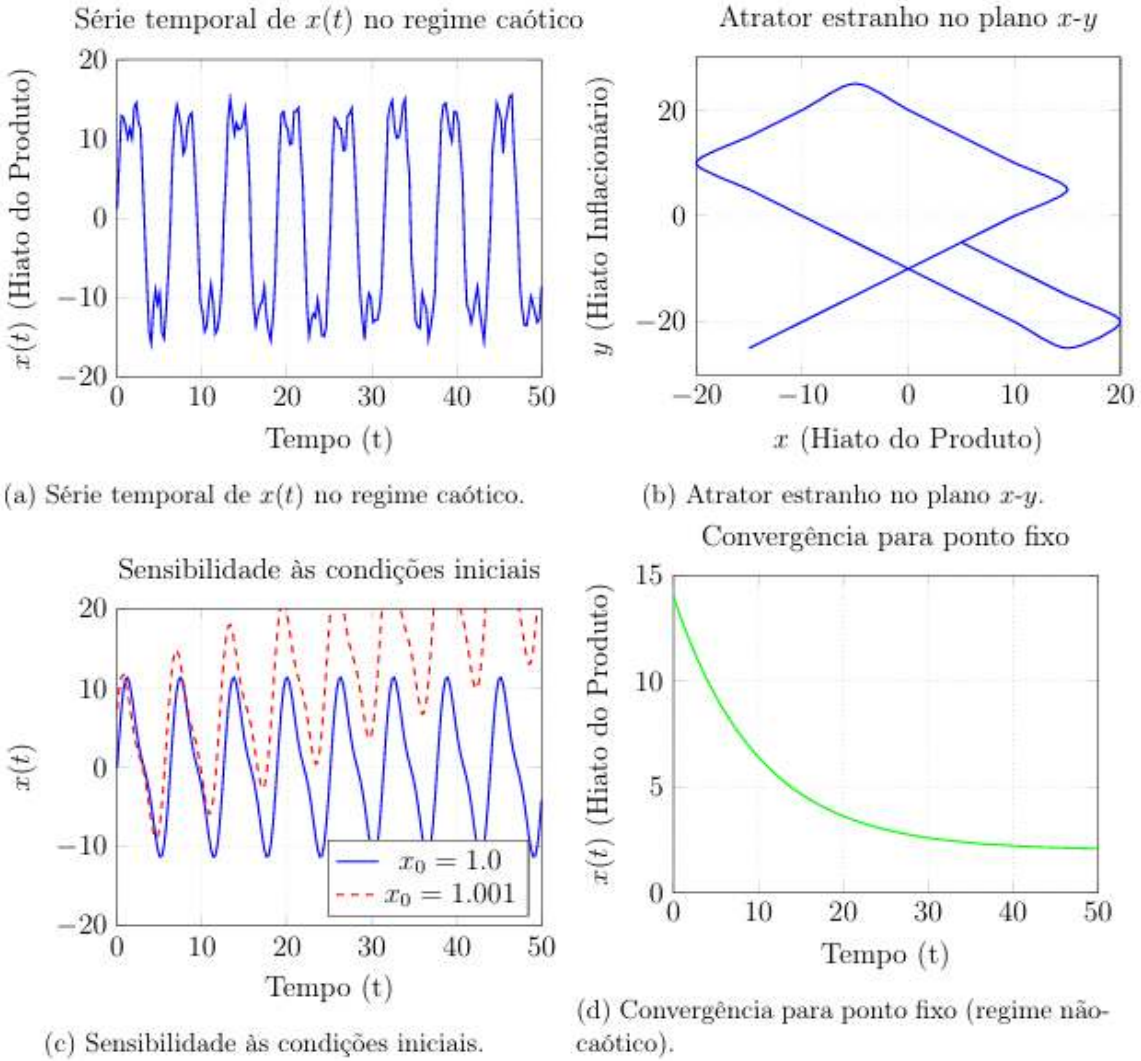
Received: 17/06/2026 - **Accepted:** 25/07/2026
Vol: 13.17
DOI: 10.66104/zqtzej92
Pages: 1-18

4.Análise e Resultados

4.1 Resultados das Simulações

As simulações confirmaram as propriedades conhecidas do sistema de Lorenz, que se refletem na interpretação econômica hipotética. Série temporal de *x*(*t*) no regime caótico Atrator estranho no plano *x*-*y*

Figura 1: Resultados das simulações do sistema de Lorenz. As figuras (a), (b) e (c) representam o regime caótico; a figura (d) mostra o regime não-caótico.



(a) Série temporal de $x(t)$ no regime caótico.

(b) Atrator estranho no plano x-y.

(c) Sensibilidade às condições iniciais.

(d) Convergência para ponto fixo (regime não-caótico).

Fonte: Autoria própria.

No Cenário Caótico (ρ = 28):

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 17/06/2026 - **Accepted:** 25/07/2026
Vol: 13.17
DOI: 10.66104/zqtzej92
Pages: 1-18

•As séries temporais da variável $x(t)$ (hiato do produto) exibiram um comportamento irregular, aperiódico, com flutuações que lembram ciclos econômicos de amplitude e duração imprevisíveis (Figura 1a).

•O gráfico de fase no plano *x-y* (hiato do produto vs. hiato inflacionário) revelou a estrutura do atrator estranho de Lorenz – dois “centros” em torno dos quais a trajetória orbita de maneira errática, nunca se repetindo exatamente, mas sempre confinada a uma região geométrica específica (Figura 1b). Isso metaforiza uma economia que flutua entre dois "regimes"(e.g., expansão moderada e sobreaquecimento, ou duas faixas de equilíbrio instável), sem jamais estabilizar-se em um ponto fixo.

•A sensibilidade às condições iniciais foi dramaticamente ilustrada. Duas trajetórias com pontos de partida praticamente idênticos (x_0 = 1.0 e 1.001) divergiram exponencialmente, tornando-se completamente diferentes após cerca de 15-20 unidades de tempo simuladas (Figura 1c). Na analogia econômica, isto significa que políticas ou eventos iniciais microscopicamente diferentes podem levar a trajetórias macroeconômicas radicalmente distintas no médio prazo, limitando severamente o horizonte de previsibilidade.

No Cenário Não-Caótico (ρ = 10):

•As trajetórias convergiram suavemente para um ponto fixo estável. A variável $x(t)$ estabilizou-se em um valor constante, representando um equilíbrio estático (Figura 1d). O atrator é um ponto simples, não uma estrutura complexa.

Estes resultados visuais servem como uma poderosa metáfora para dois "regimes “econômicos possíveis: um regime de equilíbrio estável e previsível (parâmetros "baixos") e um regime de flutuação endógena complexa e imprevisível no longo prazo (parâmetros "críticos").

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 17/06/2026 - **Accepted:** 25/07/2026
Vol: 13.17
DOI: 10.66104/zqtzej92
Pages: 1-18

Análise Comparativa com Modelos Econômicos

A comparação com modelos econômicos não lineares estabelecidos revela semelhanças estruturais importantes:

Tabela 1: Comparação entre o Sistema de Lorenz e Modelos Econômicos Não Lineares

Aspecto	Sistema de Lorenz	Modelos Econômicos (Kaldor, Goodwin)
Estrutura matemática	3 equações diferenciais não lineares acopladas	2-3 equações diferenciais não lineares acopladas
Mecanismos	Retroalimentação entre variáveis	Retroalimentação entre variáveis econômicas
Comportamento dinâmico	Ponto fixo, ciclo limite, caos	Ponto fixo, ciclos, possível caos
Sensibilidade	Alta sensibilidade às condições iniciais	Sensibilidade a parâmetros e condições iniciais
Interpretação econômica	Metaforiza interações entre produção, inflação, juros	Modela interações entre investimento, poupança, distribuição

Fonte: Autoria própria

5.Discussão

5.1 Potenciais Aplicações na Macroeconomia

O sistema de Lorenz demonstra que a complexidade e a irregularidade podem emergir de um modelo determinístico simples, sem a necessidade de choques estocásticos externos. Isso corrobora a linha de pesquisa iniciada por economistas como Richard Day, que argumenta que as não linearidades inerentes às decisões de investimento, aos processos de acumulação e à formação de preços podem, por si só, gerar flutuações caóticas.

O conceito de atrator estranho oferece uma nova forma de pensar sobre a "estabilidade “de uma economia. Em vez de um ponto de equilíbrio, a economia pode orbitar um conjunto geométrico complexo. As séries temporais

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 17/06/2026 - **Accepted:** 25/07/2026
Vol: 13.17
DOI: 10.66104/zqtzej92
Pages: 1-18

são irregulares, mas a dinâmica subjacente é estruturada e confinada. Crises financeiras e recessões profundas poderiam ser interpretadas como "saltos" entre diferentes lóbulos do atrator ou como períodos de maior volatilidade dentro da mesma estrutura.

5.2 Limitações e Críticas

- **Falta de Micro fundamentos e Otimização:** O sistema de Lorenz é fenomenológico, derivado de leis físicas aproximadas. A macroeconomia dominante exige, desde a crítica de Lucas, que modelos agregados derivem de comportamentos individuais otimizadores. A transposição direta carece deste fundamento.

- **Parâmetros Abstratos vs. Parâmetros Econômicos:** Os parâmetros σ, ρ, β têm significado físico claro. Sua contraparte econômica na nossa analogia é vaga e difícil de mensurar empiricamente. O que seria exatamente o "número de Rayleigh" de uma economia?

- **Aparente Desprezo por Instituições e Expectativas Racionais:** O modelo é puramente mecânico. Não leva em conta a formação racional (ou adaptativa) de expectativas, o papel das instituições, a assimetria de informação ou mudanças de regime de política, elementos centrais da análise macroeconômica moderna.

- **Dificuldade de Detecção Empírica:** Mesmo em séries geradas por caos determinístico, a distinção estatística em relação a processos estocásticos de alta ordem é extremamente difícil, especialmente com dados econômicos ruidosos e de baixa frequência. Muitos dos primeiros testes de caos em dados econômicos (PIB, bolsa) foram posteriormente questionados.

5.3 Contribuições Conceituais

Apesar das limitações, a aplicação metafórica das equações de Lorenz oferece contribuições importantes:

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 17/06/2026 - **Accepted:** 25/07/2026
Vol: 13.17
DOI: 10.66104/zqtzej92
Pages: 1-18

1. **Crítica ao Paradigma do Equilíbrio**: Serve como um contraponto matemático rigoroso à visão de que desvios do equilíbrio são sempre transitórios e causados por fatores externos.

2. **Ênfase na Não Linearidade:** Argumenta que relações não lineares (limiares, retroalimentações positivas) não são uma curiosidade, mas podem ser a regra em sistemas econômicos complexos.

3. **Efeito pragmático na Previsão**: O "efeito borboleta “impõe limites epistemológicos à previsão econômica de longo prazo, mesmo com um modelo perfeito, devido à impossibilidade prática de se medir condições iniciais com precisão infinita.

4. **Ponte com a Economia da Complexidade**: Alinha-se com abordagens mais recentes que veem a economia como um sistema complexo adaptativo, onde agentes heterogêneos interagem, padrões emergem e a dinâmica é fundamentalmente não linear e fora do equilíbrio.

6.Conclusão

Este artigo explorou a aplicação das equações de Lorenz na macroeconomia, não como um modelo pronto para ser estimado, mas como uma poderosa lente conceitual através da qual podemos reexaminar a dinâmica econômica. Concluímos que o valor principal desta transposição interdisciplinar reside nos insights qualitativos que ela proporciona. O sistema de Lorenz funciona como uma "prova de conceito “matemática de que: (a) a complexidade e a irregularidade observadas em séries temporais macroeconômicas *podem* ter origem endógena; (b) a interação não linear entre um pequeno número de variáveis agregadas é suficiente para gerar tal complexidade; e (c) a noção de equilíbrio pode ser substituída ou complementada pela noção de um *atrator* – um padrão dinâmico estruturado, mas não estático, para o qual o sistema converge. As simulações realizadas ilustraram de forma clara a transição entre um regime de equilíbrio estável e um regime caótico, dependendo dos parâmetros do sistema. Na analogia econômica, isso sugere que uma economia pode transitar entre fases de estabilidade previsível e fases de flutuação endógena complexa,

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 17/06/2026 - **Accepted:** 25/07/2026
Vol: 13.17
DOI: 10.66104/zqtzej92
Pages: 1-18

dependendo de fatores estruturais como o grau de agressividade da resposta da política monetária (ρ), a velocidade de ajuste dos mercados (σ) ou a propensão ao endividamento (β). **No entanto, as limitações são significativas. A aplicação literal e direta das equações de Lorenz é inadequada, dada a falta de micro fundamentos, a natureza específica dos parâmetros e a ausência de elementos centrais da teoria econômica moderna, como expectativas e instituições. Portanto, o caminho mais frutífero, sugerido por este estudo, não é forçar variáveis econômicas nas equações de Lorenz originais, mas sim incorporar o espírito da teoria do caos e da análise de sistemas dinâmicos não lineares na construção de modelos econômicos propriamente ditos**. Isto implica:

- Desenvolver modelos macroeconômicos com equações de movimento intrinsecamente não lineares.
- Investigar, teoricamente e empiricamente, a existência de retroalimentações positivas e mecanismos de saturação que possam levar a múltiplos equilíbrios ou a dinâmicas cíclicas complexas.
- Utilizar ferramentas da teoria dos sistemas dinâmicos (análise de bifurcação, expoentes de Lyapunov, gráficos de fase) para analisar a estabilidade e o comportamento qualitativo desses modelos.
- Aceitar que a previsão econômica de médio e longo prazo possui limites intrínsecos, o que deve modificar a forma como comunicamos as projeções e avaliamos políticas.

Em suma, as equações de Lorenz não nos dão um novo modelo macroeconômico, mas oferecem uma linguagem e uma intuição poderosa para repensar a instabilidade econômica. Elas nos convidam a ver a macroeconomia não como um relógio que ocasionalmente quebra, mas como um sistema vivo e complexo, cuja aparente desordem pode ser, em parte, a expressão de uma ordem determinística profunda e não linear. **Ademais enfatizamos a importância cada vez maior no aprofundamento do ensino de**

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 17/06/2026 - **Accepted:** 25/07/2026
Vol: 13.17
DOI: 10.66104/zqtzej92
Pages: 1-18

matemática avançada em programas de Graduação e Pós-graduação em Economia, com o intuito de melhorar e refinar a percepção dos alunos acerca das possibilidades de aplicação de diferentes modelos matemáticos em diferentes áreas da pesquisa empírica econômica.

7.Referências Bibliográficas

[1] ALLIGOOD, K. T.; SAUER, T. D.; YORKE, J. A. **Chaos: an introduction to dynamical systems**. New York: Springer-Verlag, 1996.

[2] BARNETT, W. A.; SERLETIS, A. **Martingales, nonlinearity, and chaos. Journal of Economic Dynamics and Control**, v. 24, n. 5-7, p. 703-724, 2000.

[3] BENHABIB, J.; DAY, R. H. **Rational choice and erratic behaviou**r. Review of Economic Studies, v. 48, n. 3, p. 459-471, 1981.

[4] BROCK, W. A.; SAYERS, C. L**. Is the business cycle characterized by deterministic chaos?** Journal of Monetary Economics, v. 22, n. 1, p. 71-90, 1988.

[5] DAY, R. H. **Irregular growth cycles.** The American Economic Review, v. 72, n. 3, p. 406-414, 1982.

[6] GOODWIN, R. M. A growth cycle. In: FEINSTEIN, C. H. (Ed.). **Socialism, capitalism and economic growth**. Cambridge: Cambridge University Press, 1967. p. 54-58.

Journal of Economic Perspectives, v. 13, n. 4, p. 169-192, 1999.

[7] KALDOR, N. **A model of the trade cycle**. The Economic Journal, v. 50, n. 197, p. 78-92, 1940.

[8] LORENZ, E. N. **Deterministic nonperiodic flow**. Journal of the Atmospheric Sciences, v. 20, n. 2, p. 130-141, 1963.

[9] MCKINNEY, Wes. **pandas: Python Data Analysis Library**. Versão 2.2.0. Python Software Foundation, 2024. Disponível em: https://pandas.pydata.org/. Acesso em: 10 jan. 2026.

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 17/06/2026 - **Accepted:** 25/07/2026
Vol: 13.17
DOI: 10.66104/zqtzej92
Pages: 1-18

[10] ROSSER JR, J. B. **On the complexities of complex economic dynamics**.

[11] STROGATZ, S. H. **Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering**. Reading: Addison-Wesley, 1994.

8. Apêndice - Código Python para Simulações

```
import numpy as np
from scipy.integrate import solve_ivp import
matplotlib.pyplot as plt

def lorenz_system(t, state, sigma, rho, beta):
    x, y, z = state
    dxdt = sigma * (y - x) dydt
    = x * (rho - z) - y dzdt = x
    * y - beta * z
    return [dxdt, dydt, dzdt]

# Parâmetros sigma
= 10.0 rho_caotico =
28.0
rho_nao_caotico =
10.0 beta = 8.0/3.0

# Condições iniciais
state0_1 = [1.0, 1.0, 1.0] # Condição inicial 1 state0_2 = [1.001, 1.0, 1.0]
# Condição inicial 2 (muito próxima)

# Tempo de simulação
t_span = (0, 50)
t_eval = np.linspace(0, 50, 10000)

# Resolver sistema para regime caótico sol1 =
solve_ivp(lorenz_system, t_span, state0_1,
```

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 17/06/2026 - **Accepted:** 25/07/2026
Vol: 13.17
DOI: 10.66104/zqtzej92
Pages: 1-18

```
                    args=(sigma, rho_caotico, beta),
                    t_eval=t_eval, method='RK45')
sol2 = solve_ivp(lorenz_system, t_span, state0_2,
                    args=(sigma, rho_caotico, beta),
                    t_eval=t_eval, method='RK45')

# Resolver sistema para regime não-caótico sol3 =
solve_ivp(lorenz_system, t_span, state0_1,
                    args=(sigma, rho_nao_caotico, beta),
                    t_eval=t_eval, method='RK45')

# Criar figuras
fig, axes = plt.subplots(2, 2, figsize=(12, 10))

# Figura 1a: Série temporal caótica
axes[0, 0].plot(sol1.t, sol1.y[0], 'b-', linewidth=0.5) axes[0,
0].set_xlabel('Tempo') axes[0, 0].set_ylabel('x(t)')
axes[0, 0].set_title('Série Temporal - Regime Caótico')
axes[0, 0].grid(True)

# Figura 1b: Atrator estranho
axes[0, 1].plot(sol1.y[0], sol1.y[1], 'b-', linewidth=0.5) axes[0,
1].set_xlabel('x') axes[0, 1].set_ylabel('y')
axes[0, 1].set_title('Atrator Estranho de Lorenz') axes[0,
1].grid(True)

# Figura 1c: Sensibilidade às condições iniciais
axes[1, 0].plot(sol1.t, sol1.y[0], 'b-', linewidth=0.5, label='x0 = 1.0') axes[1,
0].plot(sol2.t, sol2.y[0], 'r--', linewidth=0.5, label='x0 = 1.001') axes[1,
0].set_xlabel('Tempo') axes[1, 0].set_ylabel('x(t)')
axes[1, 0].set_title('Sensibilidade às Condições Iniciais') axes[1,
0].legend() axes[1, 0].grid(True)

# Figura 2a: Convergência para ponto fixo axes[1,
1].plot(sol3.t, sol3.y[0], 'g-', linewidth=0.5) axes[1,
1].set_xlabel('Tempo') axes[1, 1].set_ylabel('x(t)')
```

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 17/06/2026 - **Accepted:** 25/07/2026
Vol: 13.17
DOI: 10.66104/zqtzej92
Pages: 1-18

```
axes[1, 1].set_title('Convergência - Regime Não-Caótico') axes[1,
1].grid(True)

plt.tight_layout()
plt.savefig('resultados_simulacoes.pdf', dpi=300, bbox_inches='tight') plt.show()
```