REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 03/10/2026 - **Accepted:** 07/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/jwf5p985
Pages: 1-36

DETERMINAÇÃO DAS FÓRMULAS FECHADAS DAS INTEGRAIS TRIGONOMÉTRICAS DE SECANTE, COSSECANTE E COTANGENTE UTILIZANDO RECORRÊNCIA LINEAR

DETERMINATION OF CLOSED-FORM FORMULAS FOR THE TRIGONOMETRIC INTEGRALS OF SECANT, COSECANT, AND COTANGENT USING LINEAR RECURRENCE

DETERMINACIÓN DE LAS FÓRMULAS CERRADAS DE LAS INTEGRALES TRIGONOMÉTRICAS DE SECANTE, COSECANTE Y COTANGENTE UTILIZANDO RECURRENCIA LINEAL

Maria Eduarda Alves Dias
Graduanda em Licenciatura em Matemática, UPE, Brasil
E-mail: eduarda.adias@upe.br

Paulo Cavalcante do Nascimento Junior
Doutor em Engenharia Mecânica, UPE, Brasil
E-mail: paulo.cavalcantejr@upe.br

Resumo

O estudo de integrais trigonométricas envolvendo potências de funções como secante, cossecante e cotangente é relevante no contexto do cálculo diferencial e integral, especialmente em problemas que exigem técnicas avançadas de integração. Em geral, integrais do tipo $\int \sec^n(x)\,dx$, $\int \csc^n(x)\,dx$ e $\int \cot^n(x)\,dx$ são resolvidas por meio de relações de recorrência, nas quais uma integral é expressa em função de outra de ordem inferior. Este trabalho tem como objetivo obter expressões explícitas e não recursivas (fórmulas fechadas) para essas integrais, utilizando recorrências lineares de primeira ordem obtidas a partir do método de integração por partes. A partir dessas relações, são analisadas as estruturas das integrais em função do índice n, considerando separadamente os casos em que n é par e ímpar. As fórmulas obtidas são verificadas em casos particulares, comparadas com resultados de integração direta, com os quais concordam, e utilizadas em exemplos didáticos. Os resultados evidenciam a possibilidade de sistematizar a obtenção dessas expressões e destacam a relação entre as técnicas de integração e a teoria das recorrências lineares.

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 03/10/2026 - **Accepted:** 07/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/jwf5p985
Pages: 1-36

Palavras-chave: Integrais trigonométricas; Recorrência linear; Fórmulas fechadas; Integração por partes; Sequências de funções

Abstract

The study of trigonometric integrals involving powers of functions such as secant, cosecant, and cotangent is relevant in the context of differential and integral calculus, particularly in problems that require advanced integration techniques. In general, integrals of the type $\int \sec^n(x)\,dx$, $\int \csc^n(x)\,dx$ and $\int \cot^n(x)\,dx$ are solved by means of recurrence relations, in which one integral is expressed in terms of another of lower order. This work aims to obtain explicit, non-recursive expressions (closed-form formulas) for these integrals, using first-order linear recurrences obtained from the integration by parts method. Based on these relations, the structures of the integrals are analyzed as a function of the index n, considering separately the cases in which n is even and odd. The formulas obtained are verified in particular cases, compared with results from direct integration, with which they agree, and used in didactic examples. The results show that it is possible to systematize the derivation of these expressions and highlight the relationship between integration techniques and the theory of linear recurrences.

Keywords: Trigonometric integrals; Linear recurrence; Closed-form formulas; Integration by parts; Sequences of functions

Resumen

El estudio de las integrales trigonométricas que involucran potencias de funciones como secante, cosecante y cotangente es relevante en el contexto del cálculo diferencial e integral, especialmente en problemas que exigen técnicas avanzadas de integración. En general, las integrales del tipo $\int \sec^n(x)\,dx$, $\int \csc^n(x)\,dx$ y $\int \cot^n(x)\,dx$ se resuelven mediante relaciones de recurrencia, en las que una integral se expresa en función de otra de orden inferior. Este trabajo tiene como objetivo obtener expresiones explícitas y no recursivas (fórmulas cerradas) para estas integrales, utilizando recurrencias lineales de primer orden obtenidas a partir del método de integración por partes. A partir de estas relaciones, se analizan las estructuras de las integrales en función del índice n, considerando por separado los casos en que n es par e impar. Las fórmulas obtenidas se verifican en casos particulares, se comparan con los resultados de la integración directa, con los cuales concuerdan, y se utilizan en ejemplos didácticos. Los resultados evidencian la posibilidad de sistematizar la obtención de estas expresiones y destacan la relación entre las técnicas de integración y la teoría de las recurrencias lineales.

Palabras clave: Integrales trigonométricas; Recurrencia lineal; Fórmulas cerradas; Integración por partes; Sucesiones de funciones

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 03/10/2026 - **Accepted:** 07/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/jwf5p985
Pages: 1-36

1. Introdução

O estudo de sequências numéricas constitui um dos pilares da matemática, sendo amplamente utilizado na análise de fenômenos discretos e na modelagem de diversos problemas teóricos e aplicados. Em particular, muitas sequências são definidas de forma recursiva, isto é, por meio de relações que permitem determinar cada termo a partir de seus antecedentes, sendo tais relações conhecidas como recorrências. Esse tipo de abordagem possibilita descrever estruturas matemáticas a partir de regras iterativas, desempenhando papel fundamental em diversas áreas do conhecimento (LIMA et al., 2004). Dentre essas, destacam-se as recorrências lineares, amplamente estudadas na literatura, com aplicações que incluem desde progressões aritméticas e geométricas até sequências clássicas, como a de Fibonacci (PEREIRA, 2014).

Paralelamente, o cálculo de integrais ocupa posição central na análise matemática, sendo essencial na resolução de problemas envolvendo áreas, volumes e aplicações em física e engenharia. No contexto das integrais trigonométricas, surgem frequentemente expressões envolvendo potências de funções como secante, cossecante e cotangente, como nos casos $\int \sec^n(x)\,dx$, $\int \csc^n(x)\,dx$ e $\int \cot^n(x)\,dx$. Em geral, tais integrais são tratadas por meio do método de integração por partes, o qual permite estabelecer relações de recorrência que expressam cada integral em função de outra de ordem inferior (FLEMMING; GONÇALVES, 2006).

No entanto, embora essas relações recorrentes sejam eficazes para o cálculo iterativo das integrais, elas, isoladamente, não fornecem diretamente a expressão explícita em função do índice n, sendo necessário aplicá-las sucessivamente até atingir um caso-base. Isso dificulta a obtenção de fórmulas fechadas, restringindo tanto a simplificação de cálculos quanto uma compreensão mais aprofundada da estrutura matemática dessas integrais

Diante disso, este trabalho investiga a relação entre integrais trigonométricas e recorrências lineares, com o objetivo de obter expressões explícitas para integrais frequentemente tratadas apenas de forma recursiva, conectando o cálculo integral à teoria de sequências.

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 03/10/2026 - **Accepted:** 07/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/jwf5p985
Pages: 1-36

Nesse contexto, o presente trabalho tem como objetivo determinar fórmulas fechadas para integrais trigonométricas envolvendo as funções secante, cossecante e cotangente, a partir da construção e análise de relações de recorrência linear obtidas por meio do método de integração por partes. Para isso, são utilizadas propriedades de recorrências lineares aplicadas a sequências de funções, considerando separadamente os casos em que o índice assume valores pares e ímpares, com o intuito de obter expressões analíticas explícitas para essas integrais.

Embora as integrais de potências trigonométricas sejam amplamente tratadas na literatura de cálculo integral (FLEMMING; GONÇALVES, 2006), este trabalho busca sistematizar a obtenção de suas expressões explícitas por meio de recorrências lineares de primeira ordem. A abordagem evidencia a conexão entre a integração por partes e a teoria das recorrências, contribuindo para a organização e a compreensão dos procedimentos de resolução.

Como base teórica, utilizam-se resultados clássicos sobre recorrências lineares, os quais estabelecem que, sob determinadas condições, é possível obter expressões explícitas para sequências definidas recursivamente. Em particular, resultados clássicos mostram que recorrências lineares, tanto de primeira quanto de segunda ordem, podem admitir soluções explícitas sob determinadas condições.

No caso de recorrências de segunda ordem com coeficientes constantes, a solução pode ser determinada por meio da equação característica associada (LIMA et al., 2004). Já no caso de recorrências de primeira ordem, como aquelas abordadas neste trabalho, existem métodos sistemáticos que permitem a obtenção de expressões explícitas a partir da solução da equação homogênea associada.

Neste trabalho, o termo fórmula fechada, ou expressão explícita finita, designa uma representação não recursiva da antiderivada, na qual o resultado para um dado índice (n) é determinado diretamente por uma expressão finita, eventualmente envolvendo somatórios finitos, sem a necessidade de aplicar sucessivamente relações de recorrência.

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 03/10/2026 - **Accepted:** 07/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/jwf5p985
Pages: 1-36

2. Recorrência Linear

O estudo de sequências numéricas constitui um dos fundamentos da Análise Matemática, sendo essencial tanto na formulação teórica quanto na modelagem de problemas em diferentes áreas da matemática. Segundo Lima (2014), uma sequência real pode ser formalmente definida como uma função $f: N \to R$, na qual a cada número natural n associa-se um valor a_n. No contexto do presente trabalho, essas sequências não são apenas listas de números, mas sim uma família de funções indexadas, cujas relações internas são determinadas por processos iterativos decorrentes de operações de integração.

As definições recursivas, por sua vez, conduzem naturalmente ao conceito de recorrência, no qual cada termo de uma sequência é determinado a partir de termos anteriores. De maneira geral, uma relação de recorrência pode ser definida como uma equação que expressa um termo em função de seus predecessores, sendo essa uma ferramenta amplamente utilizada na modelagem de problemas matemáticos (SIMÕES, 2014).

Ademais, recorrências aparecem em diversos contextos, especialmente em problemas de contagem e em algoritmos, nos quais soluções mais complexas podem ser construídas a partir da resolução de versões menores do mesmo problema, evidenciando sua relevância tanto na matemática quanto na computação (ROSEN, 2012).

Uma sequência recorrente pode ser representada, em termos gerais, por uma relação do tipo $a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1)$, sendo necessário o conhecimento de condições iniciais para sua completa determinação (SIMÕES, 2014). A quantidade de termos anteriores necessários para definir um novo termo caracteriza a ordem da recorrência, sendo esse um aspecto importante na sua classificação. De acordo com Castro (2016):

> Uma relação de recorrência de ordem *k* é uma equação que relaciona o termo x_n com os seus *k* termos imediatamente anteriores x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_{n-k} para todo $n \geq k$. Quando essa relação é uma combinação linear desses termos com coeficientes constantes, dizemos que a recorrência é linear. (CASTRO, 2016, p. 15).

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 03/10/2026 - **Accepted:** 07/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/jwf5p985
Pages: 1-36

Aprofundando essa definição, uma recorrência linear de ordem k pode ser escrita na forma $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + f(n)$, em que $c_1, c_2, \ldots, c_k$ são constantes reais e $f(n)$ é uma função conhecida (ROSEN, 2012). Quando $f(n) = 0$, a recorrência é dita homogênea; caso contrário, é chamada não homogênea.

Embora essa forma geral seja bastante abrangente, neste trabalho teremos interesse particular nas recorrências lineares de primeira ordem. Nesse caso, a equação se reduz à forma $a_{n+1} = p(n)a_n + q(n)$, onde $p(n)$ e $q(n)$ são funções conhecidas.

Para recorrências lineares não homogêneas de primeira ordem dessa forma, existem métodos sistemáticos que permitem determinar sua solução geral a partir da solução da recorrência homogênea associada e por meio de uma substituição que permite reduzir a recorrência a uma forma mais simples. Esse tipo de resultado é particularmente relevante no contexto deste trabalho, uma vez que as relações obtidas para as integrais trigonométricas apresentam exatamente essa estrutura.

Para explicitar esse procedimento, conforme apresentado por Lima et al. (2004), considera-se inicialmente a recorrência homogênea associada

$$x_{n+1} = p(n)x_n$$

e seja (x_n) uma solução não nula dessa equação.

Supondo que a solução da recorrência não homogênea possa ser escrita na forma $a_n = u_n x_n$, onde u_n é uma sequência a ser determinada, substitui-se essa expressão na recorrência original, obtendo-se

$$u_{n+1}x_{n+1} = p(n)u_n x_n + q(n)$$

Como $x_{n+1} = p(n)x_n$, segue que

$$u_{n+1}x_{n+1} = u_n x_{n+1} + q(n)$$

e, portanto,

$$(u_{n+1} - u_n)x_{n+1} = q(n)$$

Dessa forma,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{q(n)}{x_{n+1}}$$

Somando essa igualdade para $k = 1,2, \ldots, n$, resulta

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 03/10/2026 - **Accepted:** 07/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/jwf5p985
Pages: 1-36

$$u_{n+1} = u_1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{q(k)}{x_k+1}$$

Sabendo que $a_1 = u_1 x_1$, segue que $u_1 = \frac{a_1}{x_1}$. Substituindo u_{n+1} na relação $a_{n+1} = u_{n+1} x_{n+1}$, obtém-se a forma geral explícita:

$$a_{n+1} = x_{n+1} \left[\frac{a_1}{x_1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{q_k}{x_{k+1}} \right]$$

Quando se considera o caso particular em que $x_1 = a_1$, tem-se $\frac{a_1}{x_1} = 1$, recuperando a expressão utilizada nos desenvolvimentos deste trabalho.

Esse procedimento evidencia como a estrutura recursiva pode ser convertida em um processo somatório, frequentemente interpretado como uma soma telescópica, permitindo “colapsar” a dependência iterativa em uma expressão analítica explícita (ROSEN, 2012). Tal resultado é fundamental para os objetivos deste trabalho, pois possibilita transformar fórmulas de redução obtidas via integração por partes em expressões fechadas.

Além disso, um aspecto essencial da análise desenvolvida neste estudo é a decomposição da sequência original em subsequências de termos pares e ímpares. Conforme Lima (2014), se uma sequência (a_n) converge ou possui uma lei de formação, então suas subsequências (a_{2n}) e (a_{2n-1}) herdam e especificam essas propriedades. No caso das integrais de $\sec^n(x)$, $\csc^n(x)$ e $\cot^n(x)$, a paridade não constitui apenas uma escolha formal, mas uma necessidade algébrica: o “salto” de ordem 2 decorrente da aplicação do método de integração por partes impede a obtenção de uma lei de formação única válida para todos os naturais, exigindo, portanto, o tratamento separado de cada ramificação da sequência.

Dessa forma, a teoria das recorrências lineares fornece o suporte necessário para transformar relações recursivas em expressões explícitas. Nas recorrências consideradas neste trabalho, os coeficientes dependem do índice (n), caracterizando recorrências lineares de primeira ordem com coeficientes variáveis. Por exemplo, na subsequência par da secante, o coeficiente é dado por $p(n) = \frac{2n}{2n+1}$.

Essa abordagem será utilizada para determinar fórmulas fechadas para integrais trigonométricas, conforme desenvolvido na seção seguinte.

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 03/10/2026 - **Accepted:** 07/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/jwf5p985
Pages: 1-36

3. Solução Analítica e Exemplificações

As fórmulas de redução constituem o ponto de partida para o tratamento das integrais trigonométricas consideradas neste trabalho. Essas relações permitem expressar uma integral de determinada ordem em função de termos algébricos e de outra integral de potência inferior, possibilitando a redução progressiva do grau da função integrada. Conforme apresentado por Flemming e Gonçalves (2006), as fórmulas de redução para as potências da secante e da cossecante podem ser obtidas por meio do método de integração por partes e, de modo análogo, considerando a relação correspondente para a função cotangente, têm-se, respectivamente[1]

$$\int \sec^n(x)\,dx = \frac{\sec^{n-2}(x)\tan(x)}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2}(x)\,dx$$

$$\int \csc^n(x)\,dx = -\frac{\csc^{n-2}(x)\cot(x)}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2}(x)\,dx$$

$$\int \cot^n(x)\,dx = -\frac{\cot^{n-1}(x)}{n-1} - \int \cot^{n-2}(x)\,dx$$

As fórmulas fechadas obtidas são válidas para os índices considerados em cada caso, incluindo os respectivos casos-base, correspondentes às integrais imediatas elementares.

Essas expressões mostram que o cálculo de uma integral de potência elevada não é obtido imediatamente, mas depende da determinação de uma nova integral de ordem inferior. Assim, a utilização dessas fórmulas exige aplicações sucessivas da relação correspondente, até que a integral remanescente seja reduzida a uma forma elementar ou a uma integral cujo resultado seja previamente conhecido. Para evidenciar esse procedimento, considere, por exemplo, a integral $\int \sec^5(x)\,dx.$ Aplicando a fórmula de redução da função secante, com $n = 5$, obtém-se

$$\int \sec^5(x)\,dx = \frac{\sec^3(x)\tan(x)}{4} + \frac{3}{4}\int \sec^3(x)\,dx$$

A integral que aparece no segundo termo ainda não foi determinada. Dessa Forma, torna-se necessário aplicar novamente a fórmula de redução, agora para

[1] As fórmulas obtidas são válidas nos domínios reais de definição das funções envolvidas: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, para a secante, e $x \neq k\pi$, para a cossecante e a cotangente, com $k \in \mathbb{Z}$. Nas expressões logarítmicas, utiliza-se o módulo para garantir que o argumento seja positivo.

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 03/10/2026 - **Accepted:** 07/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/jwf5p985
Pages: 1-36

$n = 3$, resultando em

$$\int \sec^3(x)\,dx = \frac{\sec(x)\tan(x)}{2} + \frac{1}{2}\int \sec(x)\,dx$$

Como a integral básica da função secante é $\int \sec(x)\,dx = \ln|\sec(x) + \tan(x)|$, a substituição sucessiva dessas expressões conduz a

$$\int \sec^5(x)\,dx = \frac{1}{4}\sec^3(x)\tan(x) + \frac{3}{8}\sec(x)\tan(x) + \frac{3}{8}\ln|\sec(x) + \tan(x)| + C$$

O desenvolvimento anterior evidencia que a aplicação das fórmulas de redução conduz a uma sequência de integrais de potências sucessivamente menores. No caso analisado, o processo ocorre da seguinte maneira:

$$\int \sec^5(x)\,dx \longrightarrow \int \sec^3(x)\,dx \longrightarrow \int \sec(x)\,dx$$

Observa-se, portanto, que, a cada aplicação da fórmula de redução, o expoente da função secante é diminuído em duas unidades. Consequentemente, uma integral de índice ímpar permanece relacionada apenas a integrais de índices ímpares, enquanto uma integral de índice par conduz somente a integrais de índices pares. Por exemplo,

$$\int \sec^6(x)\,dx \longrightarrow \int \sec^4(x)\,dx \longrightarrow \int \sec^2(x)\,dx$$

Essa característica também está presente nas fórmulas de redução da cossecante e da cotangente. Desse modo, a sequência geral das integrais não constitui uma única cadeia de dependência, mas divide-se naturalmente em duas classes independentes: a dos índices pares e a dos índices ímpares.

Para fins de clareza e simplificação da notação algébrica ao longo das deduções recursivas, as constantes de integração são omitidas durante os passos intermediários do processo iterativo, sendo reintroduzida uma única constante arbitrária ($C \in R$) ao final de cada fórmula explícita para as integrais indefinidas.

Para fundamentar as deduções recursivas nas seções subsequentes, a tabela 1 reúne as integrais elementares de referência correspondentes aos casos-base (r_1 e s_1) para cada função trigonométrica considerada.

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 03/10/2026 - **Accepted:** 07/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/jwf5p985
Pages: 1-36

Tabela 1 - Integrais elementares de referência (casos-base)

Função	Caso-base ímpar	Caso-base par
Secante	$r_1 = \int \sec x \ dx = \ln\lvert\sec x + \tan x\rvert + C$	$s_1 = \int \sec^2 x \ dx = \tan x + C$
Cossecante	$r_1 = \int \csc x \ dx = \ln\left\lvert\tan\frac{x}{2}\right\rvert + C$	$s_1 = \int \csc^2 x \ dx = -\cot x + C$
Cotangente	$r_1 = \int \cot x \ dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$	$s_1 = \int \cot^2 x \ dx = -\cot x - x + C$

Fonte: elaboração própria.

3.1 INTEGRAIS DA FUNÇÃO SECANTE

Seja definida a sequência de integrais:

$$a_n = \int \sec^{\,n}(x)\, dx$$

com $n \in N$. Dessa forma, os primeiros termos dessa sequência podem ser escritos como

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots = \int \sec(x)\ dx, \int \sec^{\,2}(x)\, dx, \int \sec^{\,3}(x)\, dx, \int \sec^{\,4}(x)\, dx, \ldots$$

Observa-se, portanto, que a sequência a_n está associada às integrais da função secante com expoentes naturais crescentes.

A partir do método de integração por partes, conforme apresentado em referências clássicas de cálculo (FLEMMING; GONÇALVES, 2006), obtém-se a seguinte relação de recorrência:

$$\int sec^n(x)dx = \left(\frac{1}{n-1}\right) sec^{n-2}(x)\tan(x) + \left(\frac{n-2}{n-1}\right)\int sec^{n-2}(x)dx$$

Tome

$$a_{n-2} = \int sec^{n-2}(x)dx$$

Assim, podemos escrever:

$$a_n = \left[\frac{n-2}{n-1}\right] a_{n-2} + \frac{sec^{n-2}(x)\tan(x)}{n-1}$$

Dada a natureza da recorrência obtida, na qual o termo de ordem n depende do termo $n-2$, a sequência original é naturalmente decomposta em duas subsequências distintas, determinadas pela paridade do expoente. Como destaca Lima (2014), o estudo de subsequências permite analisar o comportamento de termos específicos (neste caso, pares e ímpares) de forma independente, o que

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 03/10/2026 - **Accepted:** 07/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/jwf5p985
Pages: 1-36

simplifica a obtenção da solução geral. Dessa forma, a sequência (a_n) associada às integrais da função secante pode ser naturalmente decomposta em duas subsequências, de acordo com a paridade do expoente.

Essa divisão será explorada a seguir, considerando separadamente os casos em que o expoente é par e ímpar, uma vez que cada subsequência apresenta comportamento próprio em relação à recorrência considerada.

3.1.1 SUBSEQUÊNCIA PAR

Neste cenário, considere a subsequência associada aos expoentes pares, representada por $(s_n) = (a_{2n}) = (a_2, a_4, a_6, \dots)$ cujos termos são definidos por

$$a_2 = \int \sec^2(x)\,dx, a_4 = \int \sec^4(x)\,dx, a_6 = \int \sec^6(x)\,dx, \dots$$

Em particular,

$$a_2 = \int \sec^2(x)\,dx = \tan(x)$$

De forma geral, essa subsequência pode ser escrita como

$$s_n = \int \sec^{2n}(x)\,dx$$

com $n \in N$.

A resolução desta subsequência fundamenta-se na adequação da fórmula de redução para o caso par. Logo, aplicando a relação de recorrência obtida anteriormente, segue que:

$$s_n = \frac{\sec^{2n-2}(x)\tan(x)}{2n-1} + \frac{2n-2}{2n-1}\int \sec^{2n-2}(x)\,dx \qquad (1)$$

Com o objetivo de tornar explícita a dependência entre termos consecutivos da subsequência, define-se o termo de ordem imediatamente inferior por meio da relação:

$$s_{n-1} = \int sec^{2n-2}(x)dx \qquad (2)$$

Daí, substituindo (2) em (1) e reorganizando os termos obtidos, é possível rescrever a recorrência, evidenciando a dependência linear entre s_n e s_{n-1}:

$$s_n = \left[\frac{2n-2}{2n-1}\right] s_{n-1} + \frac{\sec^{2n-2}(x)\tan(x)}{2n-1} \qquad (3)$$

Para adequar a expressão à forma padrão de recorrência em função de s_{n+1}, realiza-se a substituição $n \mapsto n+1$ na Eq. (3), obtendo-se:

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 03/10/2026 - **Accepted:** 07/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/jwf5p985
Pages: 1-36

$$s_{n+1} = \frac{2n}{2n+1} s_n + \frac{\sec^{2n}(x)\tan(x)}{2n+1}$$

A fim de simplificar a notação e destacar o termo não homogêneo da recorrência, define-se a função auxiliar $q(n)$ por meio da seguinte expressão:

$$q(n) = \frac{\sec^{2n}(x)\tan(x)}{2n+1}$$

Com essa definição, a recorrência pode ser reescrita de forma mais concisa, evidenciando claramente sua estrutura linear de primeira ordem:

$$s_{n+1} = \frac{2n}{2n+1} s_n + q(n)$$

Para a resolução dessa equação, considera-se inicialmente a recorrência homogênea associada, onde x_n é solução não nula da recorrência homogênea associada $(q(n) = 0)$:

$$x_{n+1} = \frac{2n}{2n+1} x_n$$

A partir da condição inicial $x_1 = s_1$, os primeiros termos da sequência homogênea são

para $n = 1$: $x_2 = \frac{2}{3} x_1$

para $n = 2$, prosseguindo com o mesmo procedimento iterativo, obtém-se o termo seguinte da sequência: $x_3 = \frac{4}{5} x_2 = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} x_1$

para $n = 3$ teremos: $x_4 = \frac{6}{7} x_3 = \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} x_1$

Da relação de recorrência $x_{k+1} = \frac{2k}{2k+1} x_k$, segue por indução sobre n que:

$$x_{n+1} = x_1 \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} x_1$$

Retornando à recorrência não homogênea, e utilizando o resultado geral obtido anteriormente para esse tipo de equação, escreve-se a solução na forma:

$$s_{n+1} = x_{n+1} \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{q(k)}{p(k) x_k}\right) \quad (4)$$

onde as funções envolvidas na recorrência são explicitadas por:

$$q(k) = \frac{sec^{2k}(x)\tan(x)}{2k+1} \quad (5\text{ a-b})$$

$$p(k) = \frac{2k}{2k+1}$$

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 03/10/2026 - **Accepted:** 07/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/jwf5p985
Pages: 1-36

Substituindo na Eq. (4) os termos obtidos nas Eqs. (5 a-b) e sabendo que $x_1 = a_2 = \int sec^2(x)\,dx = tan(x)$, chega-se à seguinte expressão:

$$s_{n+1} = \frac{[2^{2n}(n!)^2]}{(2n+1)!}\tan(x)\left[1+\sum_{k=1}^{n}\frac{\sec^{2k}(x)\tan(x)(2k-1)!}{2k2^{2k-2}[(k-1)!]^2\tan(x)}\right]$$

Com o objetivo de reindexar a expressão em função de s_n, realiza-se a substituição $n \mapsto n-1$, resultando em:

$$s_n = \frac{2^{2n-2}[(n-1)!]^2}{(2n-1)!}\tan(x)\left[1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sec^{2k}(x)\tan(x)(2k-1)!}{2k2^{2k-2}[(k-1)!]^2\tan(x)}\right]^{2}$$

Incorporando o termo constante ao somatório, pode-se escrever:

$$s_n = \frac{2^{2n-2}[(n-1)!]^2}{(2n-1)!}\tan(x)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\sec^{2k}(x) + C$$

■

Demonstração por Indução Finita (Caso Par da Secante)

Seja $P(n)$ a propriedade que afirma que $\int \sec^{2n} x\,dx = s_n(x) + C$, para todo $n \geq 1$, em que $s_n(x) = \frac{2^{2n-2}[(n-1)!]^2}{(2n-1)!}\tan x\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\sec^{2k} x$

(i) Base da indução ($n = 1$):

Para $n = 1$, temos $s_1(x) = \frac{2^0(0!)^2}{1!}\tan x\sum_{k=0}^{0}\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\sec^{2k} x$

Como o somatório contém apenas o termo $k = 0$, segue que $s_1(x) = \tan x$.

Como $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$, a propriedade $P(1)$ é verdadeira.

(ii) Hipótese de indução:

Suponha que $P(n)$ seja verdadeira para um determinado $n \geq 1$, isto é,

$$s_n(x) = \frac{2^{2n-2}[(n-1)!]^2}{(2n-1)!}\tan x\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\sec^{2k} x$$

(iii) Passo indutivo:

Pela fórmula de redução das integrais de potências da secante,

$$s_{n+1}(x) = \frac{2n}{2n+1}s_n(x) + \frac{\sec^{2n} x\tan x}{2n+1}$$

Substituindo a hipótese de indução, obtemos

$$s_{n+1}(x) = \frac{2n}{2n+1}\frac{2^{2n-2}[(n-1)!]^2}{(2n-1)!}\tan x\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\sec^{2k} x + \frac{\sec^{2n} x\tan x}{2n+1}$$

[2] Adota-se a convenção de que um somatório vazio, como $\sum_{k=1}^{0}(\cdot)$, é igual a zero. Assim, para $n = 1$, a expressão correspondente reduz-se ao termo restante, de acordo com o respetivo caso-base.

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 03/10/2026 - **Accepted:** 07/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/jwf5p985
Pages: 1-36

Simplificando o coeficiente que multiplica o somatório, temos

$$\frac{2n}{2n+1}\frac{2^{2n-2}[(n-1)!]^2}{(2n-1)!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Além disso, observa-se que

$$\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \cdot \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{1}{2n+1}$$

Portanto, o termo adicional pode ser incorporado ao somatório como o termo $k = n$, resultando em

$$s_{n+1}(x) = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}\tan x \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\sec^{2k} x$$

Essa expressão coincide com a fórmula proposta para $s_{n+1}(x)$. Logo, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Conclusão: Pelo princípio da indução finita, a expressão explícita é válida para todo $n \geq 1$, nos intervalos em que a função secante está definida. ■

Verificação por Diferenciação (Caso Par da Secante)

Seja

$$s_n(x) = A_n \tan x \sum_{k=0}^{n-1} c_k \sec^{2k} x$$

em que

$$A_n = \frac{2^{2n-2}[(n-1)!]^2}{(2n-1)!}, \qquad c_k = \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}$$

Derivando pela regra do produto e utilizando a identidade $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$, obtemos

$$s_n{}'(x) = A_n[\sum_{k=0}^{n-1} c_k \sec^{2k+2} x + \sum_{k=1}^{n-1} 2\,k c_k \sec^{2k+2} x - \sum_{k=1}^{n-1} 2\,k c_k \sec^{2k} x]$$

Reorganizando os termos de mesma potência, o coeficiente de $\sec^{2j} x$, para $1 \leq j \leq n-1$, é $(2j-1)c_{j-1} - 2jc_j$. Como $c_j = \frac{2j-1}{2j}c_{j-1}$, esses coeficientes intermediários são nulos. Portanto, todos os termos intermediários se cancelam, restando unicamente o termo de maior potência $s_n^{\prime(x)} = A_n(2n-1)c_{n-1}\sec^{2n} x$

Por definição, $c_{n-1} = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-2}[(n-1)!]^2}$. Substituindo as expressões de A_n e c_{n-1}, verifica-se que $A_n(2n-1)c_{n-1} = 1$. Consequentemente, $s_n^{\prime(x)} = \sec^{2n} x$. Assim, a diferenciação confirma que $s_n(x)$ é uma primitiva de $\sec^{2n} x$, para todo $n \geq 1$, nos intervalos em que a função secante está definida.

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 03/10/2026 - **Accepted:** 07/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/jwf5p985
Pages: 1-36

EXEMPLO 1: $n = 2$

Nesse caso nós teremos $s_2 = \int \sec^4(x)\,dx$.

Pela fórmula:

$$s_2 = \frac{2^2(1!)^2}{3!}\tan(x)\sum_{k=0}^{1}\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\sec^{2k}(x)$$

O fator fora da soma é $\frac{2}{3}$

O somatório é: $\frac{0!}{1}\sec^0(x) + \frac{2!}{2^2(1!)^2}\sec^2(x) = 1 + \frac{1}{2}\sec^2(x)$

Então $s_2 = \frac{2}{3}\tan(x)\left(1 + \frac{1}{2}\sec^2(x)\right) = \frac{2}{3}\tan(x) + \frac{1}{3}\tan(x)\sec^2(x)$

Como $\sec^2(x) = 1 + \tan^2(x)$, $s_2 = \tan(x) + \frac{1}{3}\tan^3(x)$

Logo, $\int \sec^4(x)\,dx = \tan(x) + \frac{1}{3}\tan^3(x) + c$, que é exatamente o resultado conhecido

3.1.2 SUBSEQUÊNCIA ÍMPAR

Considere a subsequência associada aos expoentes ímpares, representada por $(r_n) = (a_{2n-1}) = (a_1, a_3, a_5, \ldots)$, cujos termos são dados por

$$a_1 = \int \sec(x)\;dx, a_3 = \int \sec^3(x)\,dx, a_5 = \int \sec^5(x)\,dx, \ldots$$

Em particular, o termo inicial da sequência é dado por

$$a_1 = \int \sec(x)\;dx = \ln|\sec(x) + \tan(x)|$$

De maneira geral, essa subsequência pode ser expressa por

$$r_n = \int \sec^{2n-1}(x)\,dx$$

com $n \in N$.

Aplicando a relação de recorrência já obtida anteriormente às integrais da função secante com expoente ímpar, e substituindo o expoente geral $2n-1$ na expressão correspondente, obtém-se uma relação que expressa a integral de ordem superior em função de uma integral de ordem imediatamente inferior. Além disso, para explicitar a dependência entre termos consecutivos da subsequência, define-se o termo de ordem anterior.

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 03/10/2026 - **Accepted:** 07/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/jwf5p985
Pages: 1-36

Substituindo essa definição e reorganizando os termos obtidos, é possível escrever a recorrência de forma mais compacta, evidenciando a relação linear entre r_n e r_{n-1}

$$r_n = \frac{\sec^{2n-3}(x)\tan(x)}{2n-2} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \sec^{2n-3}(x)\,dx$$

$$r_{n-1} = \int \sec^{2n-3}(x)\,dx$$

$$r_n = \frac{\sec^{2n-3}(x)\tan(x)}{2n-2} + \frac{2n-3}{2n-2} r_{n-1}$$

Para adequar a expressão à forma padrão de recorrência em função de r_{n+1}, realiza-se a mudança de índice $n \mapsto n+1$, obtendo-se

$$r_{n+1} = \frac{\sec^{2n-1}(x)\tan(x)}{2n} + \frac{2n-1}{2n} r_n$$

Com o objetivo de destacar o termo não homogêneo da recorrência e simplificar sua notação, a expressão é reescrita na forma

$$r_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} r_n + q(n)$$

Onde a função $q(n)$ é definida por

$$q(n) = \frac{\sec^{2n-1}(x)\tan(x)}{2n}$$

Considerando inicialmente a recorrência homogênea associada, obtida ao se anular o termo não homogêneo, isto é,

$$x_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} x_n$$

A partir da condição inicial $x_1 = a_1$, calculam-se os primeiros termos da sequência homogênea para ilustração

Tomando $n = 1$: $x_2 = \frac{1}{2} x_1$

Prosseguindo com $n = 2$: $x_3 = \frac{3}{4} x_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} x_1$

Dando continuidade ao mesmo procedimento, calcula-se $n = 3$: $x_4 = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} x_1$

Da relação de recorrência $x_{k+1} = \frac{2k-1}{2k} x_k$, segue por indução sobre n que:

$$x_{n+1} = x_1 \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x_1$$

Retornando à recorrência não homogênea, e utilizando o resultado geral para esse tipo de equação, temos

$$r_{n+1} = x_{n+1}\left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{q(k)}{p(k)x_k}\right)$$

em que as funções envolvidas na recorrência são explicitadas por

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 03/10/2026 - **Accepted:** 07/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/jwf5p985
Pages: 1-36

$$q(k) = \frac{\sec^{2k-1}(x)\tan(x)}{2k}$$

$$p(k) = \frac{2k-1}{2k}$$

Substituindo esses termos na expressão anterior, e sabendo que

$$x_1 = a_1 = \ln|\sec(x) + \tan(x)|$$

obtém-se a seguinte expressão:

$$r_{n+1} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\ln|\sec(x) + \tan(x)|\left[1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{2^{2k-2}[(k-1)!]^2\sec^{2k-1}(x)\tan(x)}{(2k-1)!\ln|\sec(x)+\tan(x)|}\right]$$

Fazendo a substituição $n \mapsto n-1$, obtém-se a fórmula correspondente para r_n

$$r_n = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-2}[(n-1)!]^2}\ln|\sec(x) + \tan(x)|\left[1 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{2^{2k-2}[(k-1)!]^2\sec^{2k-1}(x)\tan(x)}{(2k-1)!\ln|\sec(x)+\tan(x)|}\right]$$

Colocando $\ln|\sec(x) + \tan(x)|$ em evidência, obtém-se

$$r_n = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-2}[(n-1)!]^2}\left[\ln|\sec(x) + \tan(x)| + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{2^{2k-2}[(k-1)!]^2}{(2k-1)!}\sec^{2k-1}(x)\tan(x)\right] + C$$

■

Note que, diferentemente do caso par, o termo geral da soma envolve o fatorial $(k-1)!$, o que impede a extensão do somatório para $k = 0$, uma vez que $(-1)!$ não está definido.

Demonstração por Indução Finita (Caso Ímpar da Secante)

Sejam $A_n = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-2}[(n-1)!]^2}$, $B_k = \frac{2^{2k-2}[(k-1)!]^2}{(2k-1)!}$

(i) Base: Para $n = 1$, a soma é vazia e $r_1(x) = \ln|\sec x + \tan x|$

(ii) Hipótese de Indução: Suponha que

$$r_n(x) = A_n[\ln|\sec x + \tan x| + \sum_{k=1}^{n-1} B_k \sec^{2k-1} x \tan x]$$

(iii) Passo Indutivo: Pela relação de recorrência,

$$r_{n+1}(x) = \frac{2n-1}{2n}r_n(x) + \frac{\sec^{2n-1} x \tan x}{2n}$$

Substituindo a hipótese de indução e simplificando os coeficientes, obtemos

$$r_{n+1}(x) = A_{n+1}[\ln|\sec x + \tan x| + \sum_{k=1}^{n} B_k \sec^{2k-1} x \tan x]$$

Logo, a fórmula é válida para todo $n \geq 1$. ■

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 03/10/2026 - **Accepted:** 07/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/jwf5p985
Pages: 1-36

Verificação por Diferenciação (Caso Ímpar da Secante)

Para $n = 1$, temos diretamente $r_1'(x) = \sec x$. Para $n \geq 2$, derivando a expressão de $r_n(x)$ e usando $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$, segue que

$$r_n'(x) = A_n[\sec x - B_1 \sec x + \sum_{k=1}^{n-2}(2kB_k - (2k+1)B_{k+1}) \sec^{2k+1} x \ + 2(n-1)B_{n-1} \sec^{2n-1} x]$$

Como $B_1 = 1$, $2kB_k = (2k+1)B_{k+1}$ e $2(n-1)A_nB_{n-1} = 1$, os termos intermediários se anulam, resultando em $r_n'(x) = \sec^{2n-1} x$

EXEMPLO 2: $n = 2$

Como $2n - 1 = 3$, temos que $r_2 = \int \sec^3(x)\, dx$

Substituindo $n = 2$, obtemos $r_2 = \frac{1}{2}[\ln \mid \sec(x) + \tan(x) \mid + \sec(x)\tan(x)]$

Ou seja, $\int \sec^3(x)\, dx = \frac{1}{2} ln \mid \sec(x) + \tan(x) \mid + \frac{1}{2}\sec(x)\tan(x) + c$, que é o resultado clássico.

3.2 INTEGRAIS DA FUNÇÃO COSSECANTE

Seja definida a sequência de integrais:

$$b_n = \int \csc^n(x)\, dx$$

com $n \in N$. Dessa forma, os primeiros termos dessa sequência podem ser escritos como

$$b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots = \int \csc(x)\ dx, \int \csc^2(x)\, dx, \int \csc^3(x)\, dx, \int \csc^4(x)\, dx, \ldots$$

Observa-se, portanto, que a sequência b_n está associada às integrais da função cossecante com expoentes naturais crescentes.

A partir do método de integração por partes, conforme apresentado em referências clássicas de cálculo (FLEMMING; GONÇALVES, 2006), obtém-se a seguinte relação de recorrência:

$$\int \csc^n(x)\, dx = -\frac{1}{n-1}\csc^{n-2}(x)\cot(x) + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2}(x)\, dx$$

Definindo

$$b_{n-2} = \int \csc^{n-2}(x)\, dx \qquad (6)$$

Assim, podemos escrever:

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 03/10/2026 - **Accepted:** 07/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/jwf5p985
Pages: 1-36

$$b_n = \frac{n-2}{n-1} b_{n-2} - \frac{\cot(x)\csc^{n-2}(x)}{n-1}$$

Nota-se que a recorrência obtida apresenta uma estrutura em que cada termo depende do termo de ordem $n-2$. Essa característica reforça a necessidade de tratar a sequência original por meio de suas subsequências par e ímpar, garantindo que a base da recorrência seja atingida corretamente (LIMA, 2014). Logo, a sequência (b_n) associada às integrais da função cossecante pode ser decomposta em duas ramificações distintas, conforme a paridade do expoente.

Essa abordagem binária simplifica a aplicação dos métodos sistemáticos descritos anteriormente, permitindo tratar as particularidades algébricas de cada grupo separadamente.

3.2.1 SUBSEQUÊNCIA PAR

Considerando a subsequência $(s_n) = (b_{2n}) = (b_2, b_4, b_6, \dots)$, associada aos expoentes pares, definida por

$$s_n = \int \csc^{2n}(x)\, dx$$

com $n \in N$.

Nesta construção, cada termo corresponde a uma potência par da cossecante, sendo definidos individualmente por:

$$b_2 = \int \csc^2(x)\, dx, b_4 = \int \csc^4(x)\, dx, b_6 = \int \csc^6(x)\, dx, \dots$$

Em particular, o termo inicial da sequência é dado por

$$b_2 = \int \csc^2(x)\, dx = -\cot(x)$$

Aplica-se a relação de recorrência obtida anteriormente às integrais da função cossecante com expoente par, e substituindo o expoente geral $2n$, obtém-se uma expressão que relaciona a integral de ordem superior com uma integral de ordem imediatamente inferior. Em seguida, define-se o termo de ordem anterior, conforme a Eq. (6). Daí, substituindo essa definição e reorganizando os termos, é possível escrever a recorrência de forma mais compacta, evidenciando a dependência linear entre s_n e s_{n-1}.

$$s_n = -\frac{\csc^{2n-2}(x)\cot(x)}{2n-1} + \frac{2n-2}{2n-1} \int \csc^{2n-2}(x)\, dx$$

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 03/10/2026 - **Accepted:** 07/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/jwf5p985
Pages: 1-36

$$s_{n-1} = \int \csc^{2n-2}(x)\, dx$$

$$s_n = \frac{2n-2}{2n-1} s_{n-1} - \frac{\cot(x)\csc^{2n-2}(x)}{2n-1}$$

Com o objetivo de reescrever a recorrência na forma padrão em função de s_{n+1}, realiza-se a substituição $n \mapsto n+1$, obtendo-se:

$$s_{n+1} = \frac{2n}{2n+1} s_n - \frac{\cot(x)\csc^{2n}(x)}{2n+1}$$

Para destacar o termo não homogêneo da recorrência e simplificar sua escrita, define-se a função auxiliar $q(n)$ por meio da expressão

$$q(n) = -\frac{\cot(x)\csc^{2n}(x)}{2n+1}$$

Teremos então:

$$s_{n+1} = \frac{2n}{2n+1} s_n + q(n)$$

Para resolver essa equação, considera-se inicialmente a recorrência homogênea associada, obtida ao se anular o termo não homogêneo, resultando em

$$x_{n+1} = \frac{2n}{2n+1} x_n$$

De forma análoga ao caso da secante par, a solução dessa recorrência homogênea segue diretamente da relação de recorrência por indução sobre n, conduzindo à expressão geral dada por

$$x_{n+1} = \frac{[2^{2n}(n!)^2]}{(2n+1)!} x_1$$

com $x_1 = b_2$.

Retornando à recorrência não homogênea, e aplicando o resultado geral estabelecido anteriormente para esse tipo de equação, escreve-se a solução na forma

$$s_{n+1} = x_{n+1}\left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{q(k)}{p(k)x_k}\right)$$

em que as funções envolvidas na recorrência são dadas por:

$$q(k) = -\frac{\cot(x)\csc^{2k}(x)}{2k+1}$$

$$p(k) = \frac{2k}{2k+1}$$

e considerando:

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 03/10/2026 - **Accepted:** 07/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/jwf5p985
Pages: 1-36

$$x_1 = b_2 = \int \csc^2(x)\,dx = -\cot(x)$$

segue a expressão geral:

$$s_{n+1} = -\frac{[2^{2n}(n!)^2]}{(2n+1)!}\cot(x)\left[1+\sum_{k=1}^{n}\frac{-csc^{2k}(x)\cot(x)(2k-1)!}{-(2k)(2^{2k-2})((k-1)!)^2 cot(x)}\right]$$

Fazendo, agora, a substituição $n \mapsto n-1$, com o objetivo de expressar o resultado diretamente em função de s_n, obtém-se

$$s_n = -\frac{\left[2^{2n-2}((n-1)!)^2\right]}{(2n-1)!}cot(x)\left[1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{-csc^{2k}(x)\cot(x)(2k-1)!}{-(2k)(2^{2k-2})((k-1)!)^2 cot(x)}\right]$$

Incorporando o termo constante ao somatório, pode-se escrever

$$s_n = -\frac{2^{2n-2}[(n-1)!]^2}{(2n-1)!}\cot(x)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\csc^{2k}(x) + C$$

■

Demonstração por Indução Finita (Caso Par da Cossecante)

Seja $P(n)$ a afirmação de que $\int \csc^{2n} x\,dx = s_n(x) + C$ para todo $n \geq 1$, em que

$$s_n(x) = -\frac{2^{2n-2}[(n-1)!]^2}{(2n-1)!}\cot x\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\csc^{2k} x$$

(i) Base da indução ($n = 1$):

Para $n = 1$, o somatório contém apenas $k = 0$,fornecendo $s_1(x) = -\cot x$. Como $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$, $P(1)$ é verdadeira.

(ii) Passo indutivo:

Assumindo $P(n)$ verdadeira para $n \geq 1$, aplica-se a relação de recorrência:

$$s_{n+1}(x) = \frac{2n}{2n+1}s_n(x) - \frac{\csc^{2n} x\cot x}{2n+1}$$

Substituindo $s_n(x)$ e simplificando os coeficientes:

$$s_{n+1}(x) = -\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}\cot x\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\csc^{2k} x + \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\csc^{2n} x\right]$$

Incorporando o termo $k = n$ ao somatório, obtém-se exatamente a expressão proposta para $s_{n+1}(x)$. Logo, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. ■

Verificação por Diferenciação (Caso Par da Cossecante)

Seja $s_n(x) = -A_n\cot x\sum_{k=0}^{n-1} c_k \csc^{2k} x$, com $A_n = \frac{2^{2n-2}[(n-1)!]^2}{(2n-1)!}$, $c_k = \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}$

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 03/10/2026 - **Accepted:** 07/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/jwf5p985
Pages: 1-36

Derivando pela regra do produto, utilizando $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$, $\frac{d}{dx}(\csc^{2k} x) = -2k \csc^{2k} x \cot x$ e a identidade $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$:

$$s_n{}'(x) = A_n[\sum_{k=0}^{n-1} c_k \csc^{2k+2} x + \sum_{k=1}^{n-1} 2\, k c_k \csc^{2k+2} x - \sum_{k=1}^{n-1} 2\, k c_k \csc^{2k} x]$$

Como o coeficiente de $\csc^{2j} x$ para $1 \leq j \leq n-1$ é $(2j-1)c_{j-1} - 2jc_j = 0$, todos os termos intermediários cancelam-se por telescopia, restando $s_n{}'(x) = \csc^{2n} x$. Assim, confirma-se que $s_n(x)$ é a primitiva de $\csc^{2n} x$ para todo $n \geq 1$

EXEMPLO 3: $n = 2$

Como $2n = 4$, temos $s_2 = \int \csc^4(x)\, dx$

Substituindo $n = 2$, obtemos $s_2 = -\frac{2}{3}\cot(x)\left(1 + \frac{1}{2}\csc^2(x)\right)$

Equivalentemente, $s_2 = -\cot(x) - \frac{1}{3}\cot^3(x)$, pois $\csc^2(x) = 1 + \cot^2(x)$

Logo, $\int \csc^4(x)\, dx = -\cot(x) - \frac{1}{3}\cot^3(x) + c$, que é o resultado clássico.

3.2.2 SUBSEQUÊNCIA ÍMPAR

Considerando a subsequência $(r_n) = (b_{2n-1}) = (b_1, b_3, b_5, \ldots)$, associada aos expoentes ímpares, definida por

$$r_n = \int \csc^{2n-1}(x)\, dx$$

com $n \in N$, tem-se, por exemplo,

$$b_1 = \int \csc(x)\ dx, b_3 = \int \csc^3(x)\, dx, b_5 = \int \csc^5(x)\, dx, \ldots$$

Em particular, o termo inicial da sequência é dado por

$$b_1 = \int \csc(x)\ dx = ln\ |\tan\left(\frac{x}{2}\right)|$$

Aplicando a relação de recorrência obtida anteriormente, obtém-se uma expressão que reduz a integral de ordem superior a uma combinação envolvendo uma integral de ordem inferior. Portanto, para explicitar essa redução, introduz-se o termo de ordem anterior. Faz-se a substituição dessa expressão na igualdade inicial, seguida de uma reorganização algébrica, permitindo reescrever a recorrência de forma mais estruturada, evidenciando a dependência entre r_n e r_{n-1}.

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 03/10/2026 - **Accepted:** 07/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/jwf5p985
Pages: 1-36

$$r_n = -\frac{\csc^{2n-3}(x)\cot(x)}{2n-2} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \csc^{2n-3}(x)\,dx$$

$$r_{n-1} = \int \csc^{2n-3}(x)\,dx$$

$$r_n = \frac{2n-3}{2n-2}r_{n-1} - \frac{\cot(x)\csc^{2n-3}(x)}{2n-2}$$

Fazendo a substituição $n \mapsto n+1$, obtém-se:

$$r_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}r_n - \frac{\cot(x)\csc^{2n-1}(x)}{2n}$$

Introduz-se a função $q(n)$ para isolar o termo não homogêneo e simplificar a notação da recorrência, definindo

$$q(n) = -\frac{\cot(x)\csc^{2n-1}(x)}{2n}$$

Com essa definição, a recorrência assume a forma padrão de uma equação linear de primeira ordem, dada por

$$r_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}r_n + q(n)$$

Considerando inicialmente a recorrência homogênea associada, isto é,

$$x_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}x_n$$

A partir da condição inicial $x_1 = b_1$, e procedendo de forma análoga ao caso da função secante ímpar, a solução homogênea segue diretamente da relação de recorrência por indução sobre n, conduzindo à expressão geral:

$$x_{n+1} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\,x_1$$

Retornando à equação não homogênea, aplica-se o resultado geral previamente estabelecido para esse tipo de recorrência

$$r_{n+1} = x_{n+1}\left(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{q(k)}{p(k)x_k}\right) \qquad (7)$$

em que as funções envolvidas são dadas por

$$q(k) = -\frac{\cot(x)\csc^{2k-1}(x)}{2k}$$

$$p(k) = \frac{2k-1}{2k}$$

e considerando:

$$x_1 = b_1 = \int \csc(x)\,dx = ln\,|\tan(\tfrac{x}{2})\,|$$

Substituindo essas informações na Eq. (7), obtém-se:

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 03/10/2026 - **Accepted:** 07/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/jwf5p985
Pages: 1-36

$$r_{n+1} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} ln \mid \tan\left(\frac{x}{2}\right) \mid \left[1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{2k-2}[(k-1)!]^2}{(2k-1)!} \frac{\csc^{2k-1}(x)\cot(x)}{\ln|\tan\left(\frac{x}{2}\right)|}\right]$$

Fazendo, agora, a substituição $n \mapsto n-1$, para que a solução seja reescrita em termos de r_n

$$r_n = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-2}[(n-1)!]^2} ln \mid \tan\left(\frac{x}{2}\right) \mid \left[1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^{2k-2}[(k-1)!]^2}{(2k-1)!} \frac{\csc^{2k-1}(x)\cot(x)}{\ln|\tan\left(\frac{x}{2}\right)|}\right]$$

Colocando o fator comum em evidência, pode-se escrever

$$r_n = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-2}[(n-1)!]^2}\left[\ln \mid \tan\left(\frac{x}{2}\right) \mid - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^{2k-2}[(k-1)!]^2}{(2k-1)!} \csc^{2k-1}(x)\cot(x)\right] + C$$

■

Demonstração por Indução Finita (Caso Ímpar da Cossecante)

(i) Base: Para $n = 1$, $r_1(x) = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|$.

(ii) Hipótese de Indução: Suponha que

$$r_n(x) = A_n\left[\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| - \sum_{k=1}^{n-1} B_k \csc^{2k-1} x \cot x\right]$$

(iii) Passo Indutivo**:** Pela recorrência,

$$r_{n+1}(x) = \frac{2n-1}{2n} r_n(x) - \frac{\csc^{2n-1} x \cot x}{2n}$$

Substituindo a hipótese e simplificando os coeficientes,

$$r_{n+1}(x) = A_{n+1}\left[\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| - \sum_{k=1}^{n} B_k \csc^{2k-1} x \cot x\right]$$

Portanto, a fórmula é válida para todo $n \geq 1$. ■

Verificação por Diferenciação (Caso Ímpar da Cossecante)

Para $n = 1$, $r_1'(x) = \csc x$. Para $n \geq 2$, derivando e usando $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$, obtemos

$$r_n'(x) = A_n[\csc x - B_1 \csc x + \sum_{k=1}^{n-2}(2kB_k - (2k+1)B_{k+1}) \csc^{2k+1} x + 2(n-1)B_{n-1} \csc^{2n-1} x]$$

Pelas identidades $B_1 = 1$, $2kB_k = (2k+1)B_{k+1}$ e $2(n-1)A_nB_{n-1} = 1$, os termos intermediários se anulam. Assim, $r_n'(x) = \csc^{2n-1} x$

EXEMPLO 4: $n = 2$

Como $2n - 1 = 3$, temos $r_2 = \int \csc^3(x)\, dx$.

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 03/10/2026 - **Accepted:** 07/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/jwf5p985
Pages: 1-36

Substituindo $n = 2$, resulta $r_2 = \frac{1}{2} ln \mid \tan\left(\frac{x}{2}\right) \mid - \frac{1}{2}\csc(x)\cot(x)$

Assim, $\int \csc^3(x)\, dx = \frac{1}{2} ln \mid \tan\left(\frac{x}{2}\right) \mid - \frac{1}{2}\csc(x)\cot(x) + c$, que coincide com o resultado conhecido.

3.3 INTEGRAIS DA FUNÇÃO COTANGENTE

De forma análoga aos casos anteriores, considera-se a sequência de integrais

$$c_n = \int \cot^n(x)\, dx$$

com $n \in N$. Os primeiros termos podem ser escritos como

$$c_1,\ c_2,\ c_3, \ldots = \int \cot(x)\ dx, \int \cot^2(x)\, dx, \int \cot^3(x)\, dx, \ldots$$

A partir da identidade trigonométrica $\cot^2(x) = \csc^2(x) - 1$, e aplicando o método de integração por partes, obtém-se a relação de recorrência

$$\int \cot^n(x)\, dx = -\frac{\cot^{n-1}(x)}{n-1} - \int \cot^{n-2}(x)\, dx$$

Observa-se, assim, que a recorrência reduz o expoente em duas unidades a cada passo, o que permite decompor a sequência em duas subsequências, correspondentes aos expoentes pares e ímpares. Assim, podemos escrever:

$$c_n = -\frac{\cot^{n-1}(x)}{n-1} - c_{n-2}$$

3.3.1 SUBSEQUÊNCIA PAR

Considerando a subsequência associada aos expoentes pares, definida por $(s_n) = (c_{2n}) = (c_2, c_4, c_6, \ldots)$, a qual pode ser expressa por

$$s_n = \int \cot^{2n}(x)\, dx$$

com $n \in N$, tem-se, por exemplo,

$$c_2 = \int \cot^2(x)\, dx, c_4 = \int \cot^4(x)\, dx, c_6 = \int \cot^6(x)\, dx, \ldots$$

Em particular, o termo inicial pode ser obtido reescrevendo a função $\cot^2(x)$ em termos de $\csc^2(x)$, o que permite integrar diretamente, resultando em

$$c_2 = \int \cot^2(x)\, dx = \int (\csc^2(x) - 1)\, dx = -\cot(x) - x$$

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 03/10/2026 - **Accepted:** 07/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/jwf5p985
Pages: 1-36

A relação de recorrência correspondente a essa subsequência pode ser obtida a partir da expressão geral previamente deduzida, conduzindo à forma

$$s_n = -\frac{\cot^{2n-1}(x)}{2n-1} - s_{n-1}$$

Para escrever a recorrência em função de s_{n+1}, realiza-se a substituição $n \mapsto n+1$, ficando

$$s_{n+1} = -\frac{\cot^{2n+1}(x)}{2n+1} - s_n$$

Com base nessa relação, calculam-se os primeiros termos da sequência para ilustração.

para $n = 1$, obtém-se

$$s_2 = -\frac{\cot^3(x)}{3} - s_1$$

para $n = 2$, substituindo o resultado anterior, chega-se a

$$s_3 = -\frac{cot^5(x)}{5} - s_2 = -\frac{\cot^5(x)}{5} + \frac{\cot^3(x)}{3} + s_1$$

para $n = 3$, repetindo o mesmo procedimento, obtém-se

$$s_4 = -\frac{\cot^7(x)}{7} - s_3 = -\frac{\cot^7(x)}{7} + \frac{\cot^5(x)}{5} - \frac{\cot^3(x)}{3} - s_1$$

Em geral, aplicando a relação de recorrência sucessivamente, obtém-se, por indução sobre n, a fórmula explícita:

$$s_{n+1} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k+1}\frac{\cot^{2k+1}(x)}{2k+1} + (-1)^n c_2$$

Assim, a expressão geral da subsequência pode ser reescrita como:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{n-k}\frac{cot^{2k+1}(x)}{2k+1} + (-1)^{n-1}c_2$$

Utilizando o valor do termo inicial, dado por

$$c_2 = \int \cot^2(x)\,dx = -\cot(x) - x$$

Chega-se à forma final da solução, expressa por

$$s_n = (-1)^n(x + \cot(x)) + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{n-k}\frac{\cot^{2k+1}(x)}{2k+1} + C$$

■

Demonstração por Indução Finita (Caso Par da Cotangente)

A fórmula proposta é $s_n(x) = (-1)^n x + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{n-k+1}}{2k-1}\cot^{2k-1}x$

(i) Base ($n = 1$): $s_1(x) = -x - \cot x$, que corresponde a $\int \cot^2 x\,dx = -\cot x -$

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 03/10/2026 - **Accepted:** 07/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/jwf5p985
Pages: 1-36

$x + C$

(ii) Hipótese de indução: Suponha a fórmula válida para $n \geq 1$.

(iii) Passo indutivo: Pela relação de recorrência, $s_{n+1}(x) = -\frac{\cot^{2n+1} x}{2n+1} - s_n(x)$

Substituindo a hipótese de indução e reorganizando os termos, obtemos

$$s_{n+1}(x) = (-1)^{n+1}x + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{n-k+2}}{2k-1} \cot^{2k-1} x$$

Logo, a fórmula é válida para todo $n \geq 1$ ■

Verificação por Diferenciação (Caso Par da Cotangente)

Derivando $s_n(x)$ e utilizando $\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$, temos $s_n^{\prime(x)} = (-1)^n - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k+1} \cot^{2k-2} x\,(1 + \cot^2 x)$. Pelo cancelamento dos termos intermediários, resulta em $s_n{}'(x) = \cot^{2n} x$

EXEMPLO 5: $n = 2$

Como $2n = 4$, tem-se $s_2 = \int \cot^4(x)\, dx$

Pela fórmula: $s_2 = x + \cot(x) - \frac{1}{3}\cot^3(x)$

Logo, $\int \cot^4(x)\, dx = x + \cot(x) - \frac{1}{3}\cot^3(x) + c$

3.3.2 SUBSEQUÊNCIA ÍMPAR

Considerando agora a subsequência $(r_n) = (c_{2n-1}) = (c_1, c_3, c_5, \ldots)$, que pode ser expressa como

$$r_n = \int \cot^{2n-1}(x)\, dx$$

com $n \in N$, tem-se, por exemplo, os primeiros termos

$$c_1 = \int \cot(x)\ dx, c_3 = \int \cot^3(x)\, dx, c_5 = \int \cot^5(x)\, dx, \ldots$$

Em particular, o termo inicial é obtido diretamente pela integração da função cotangente, resultando em

$$c_1 = \int \cot(x)\ dx = \ln|\sin(x)|$$

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 03/10/2026 - **Accepted:** 07/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/jwf5p985
Pages: 1-36

A partir da relação de recorrência previamente estabelecida, e substituindo o expoente geral correspondente, obtém-se uma expressão que relaciona a integral de ordem superior com o termo imediatamente anterior da subsequência

$$r_n = -\frac{\cot^{2n-2}(x)}{2n-2} - r_{n-1}$$

realizando a substituição $n \mapsto n+1$, segue que

$$r_{n+1} = -\frac{\cot^{2n}(x)}{2n} - r_n$$

Com base nessa relação, calculam-se os primeiros termos da sequência para ilustração

para $n = 1$:

$$r_2 = -\frac{\cot^2(x)}{2} - r_1$$

para $n = 2$:

$$r_3 = -\frac{cot^4(x)}{4} - r_2 = -\frac{\cot^4(x)}{4} + \frac{\cot^2(x)}{2} + r_1$$

para $n = 3$:

$$r_4 = -\frac{\cot^6(x)}{6} - r_3 = -\frac{\cot^6(x)}{6} + \frac{\cot^4(x)}{4} - \frac{\cot^2(x)}{2} - r_1$$

Em geral, aplicando a relação de recorrência sucessivamente, obtém-se, por indução sobre n, a fórmula explícita

$$r_{n+1} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k+1}\frac{\cot^{2k}(x)}{2k} + (-1)^n c_1$$

Assim, a expressão geral pode ser escrita como:

$$r_n = \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{n-k}\frac{cot^{2k}(x)}{2k} + (-1)^{n-1}c_1$$

Utilizando o valor do termo inicial, dado por

$$c_1 = \int \cot(x)\ dx = \ln|\sin(x)|$$

Concluímos que a forma final da solução pode ser expressa por

$$r_n = (-1)^{n-1}\ln|\sin(x)| + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{n-k}\frac{\cot^{2k}(x)}{2k} + C$$

■

Demonstração por Indução Finita (Caso Ímpar da Cotangente)

A fórmula proposta é $r_n(x) = (-1)^{n-1}\ln|\sin x| + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{n-k}}{2k}\cot^{2k} x$

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 03/10/2026 - **Accepted:** 07/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/jwf5p985
Pages: 1-36

(i) Base ($n = 1$): Como o somatório é vazio, $r_1(x) = \ln|\sin x|$, que corresponde a $\int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + C$

(ii) Hipótese de indução: Suponha a fórmula válida para $n \geq 1$

(iii) Passo indutivo: Pela relação de recorrência, $r_{n+1}(x) = -\frac{\cot^{2n} x}{2n} - r_n(x)$

Substituindo a hipótese de indução e reorganizando os termos, obtemos

$$r_{n+1}(x) = (-1)^n \ln|\sin x| + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n+1-k}}{2k} \cot^{2k} x$$

Logo, a fórmula é válida para todo $n \geq 1$. ■

Verificação por Diferenciação (Caso Ímpar da Cotangente)

Para $n = 1$, temos diretamente $r_1'(x) = \cot x$. Para $n \geq 2$, derivando a expressão e utilizando $\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$, obtemos

$$r_n'^{(x)} = (-1)^{n-1} \cot x - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{n-k} \cot^{2k-1} x \, (1 + \cot^2 x)$$

Pelo cancelamento dos termos intermediários, resulta em $r_n'(x) = \cot^{2n-1} x$

EXEMPLO 6: $n = 2$

Como $2n - 1 = 3$, tem-se $r_2 = \int \cot^3(x) \, dx$

Pela fórmula: $r_2 = -ln|\sin(x)| - \frac{1}{2}\cot^2(x)$

Assim, $\int \cot^3(x) \, dx = -ln|\sin(x)| - \frac{1}{2}\cot^2(x) + c$

4. APLICAÇÕES E VERIFICAÇÕES EM CASOS PARTICULARES

As aplicações de engenharia e geometria apresentadas nesta seção, tais como o cálculo de áreas de perfis de terreno e volumes de sólidos de revolução, constituem exemplos matemáticos hipotéticos com finalidade estritamente didática, visando ilustrar o emprego prático das fórmulas fechadas obtidas, sem a pretensão de constituir modelos físicos validados.

Ressalta-se que a contribuição das expressões gerais obtidas não consiste na descoberta inédita de primitivas, uma vez que as integrais de potências trigonométricas são tratadas na literatura clássica, mas na sistematização de um procedimento algébrico para a obtenção de expressões explícitas por meio de

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 03/10/2026 - **Accepted:** 07/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/jwf5p985
Pages: 1-36

recorrências lineares, permitindo o cálculo de integrais de ordem superior sem a necessidade de aplicações sucessivas da integração por partes.

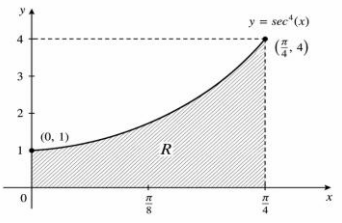
4.1 Cálculo de Área Sob Uma Curva Trigonométrica

Em problemas de cálculo integral, a área de uma região plana pode ser determinada por meio de uma integral definida. Quando uma região R é limitada superiormente por uma função contínua $f(x)$, inferiormente pelo eixo das abscissas Ox e lateralmente pelas retas $x = a$e $x = b$, sua área é dada por $A = \int_a^b f(x)\,dx$, desde que $f(x) \geq 0$ em todo o intervalo $[a, b]$. De modo mais geral, quando a região está compreendida entre duas funções contínuas $f(x)$e $g(x)$, com $f(x) \geq g(x)$, a área é calculada por $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$.

Em determinados modelos matemáticos, funções trigonométricas com potências elevadas podem ser utilizadas para representar comportamentos de crescimento não linear acentuado em intervalos restritos. Nesse contexto, o cálculo de áreas sob curvas desse tipo permite ilustrar a aplicabilidade das fórmulas fechadas obtidas anteriormente.

Dessa forma, vamos determinar a área da região Rno plano cartesiano, delimitada superiormente pela função $f(x) = \sec^4(x)$, inferiormente pelo eixo das abscissas (Ox) e lateralmente pelas retas verticais $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{4}$.

Figura 1 – Região R



Fonte: Autor.

Como $f(x) = \sec^4(x)$ é não negativa no intervalo considerado, aplica-se a fórmula de área sob uma curva: $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} sec^4(x)\,dx$

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 03/10/2026 - **Accepted:** 07/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/jwf5p985
Pages: 1-36

Pela fórmula obtida para a subsequência par das integrais da secante, tem-se, para $n = 2$, $\int \sec^4(x)\,dx = \frac{2^2[(1)!]^2}{3!}\tan(x)\sum_{k=0}^{1}\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\sec^{2k}(x)$

Calculando os termos, temos que a área da região R é $A = \frac{4}{3}$

Esse resultado mostra como a fórmula fechada obtida para as integrais pares da secante permite calcular diretamente áreas associadas a potências trigonométricas, evitando a repetição sucessiva do processo de integração por partes.

4.2 Cálculo de Volume de Um Sólido de Revolução

Em diversas situações de engenharia, o cálculo de volumes de sólidos de revolução é fundamental para estimar a quantidade de material necessária na fabricação de estruturas com simetria axial. Quando o perfil de um objeto pode ser descrito por uma função contínua, o volume gerado pela sua rotação em torno de um eixo pode ser determinado por meio de integrais definidas.

Considere uma função contínua $f(x) \geq 0$definida no intervalo $[a, b]$. O volume do sólido gerado pela rotação da região delimitada pelo gráfico de $f(x)$, pelo eixo das abscissas e pelas retas $x = a$ e $x = b$, em torno do eixo Ox, é dado por

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx$$

Esse método, conhecido como método dos discos, permite transformar o problema geométrico de cálculo de volume em um problema analítico envolvendo integrais.

Vamos supor que um engenheiro está projetando a lente interna de um farol cujo perfil é modelado pela função $f(x) = \csc^5(x)$, sendo o sólido obtido pela rotação dessa curva em torno do eixo Ox, no intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$. Determinaremos o volume de material necessário para a construção desse componente. Aplicando a fórmula do volume de revolução, tem-se $V = \pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \csc^{10}(x)\,dx$.

Observa-se que a integral obtida envolve uma potência elevada da função cossecante, evidenciando a utilidade das fórmulas fechadas desenvolvidas neste trabalho.

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 03/10/2026 - **Accepted:** 07/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/jwf5p985
Pages: 1-36

Pela expressão geral obtida para a subsequência par das integrais da cossecante, tem-se, para $n = 5$,

$$\int \csc^{10}(x)\,dx = -\frac{2^{2\cdot5-2}[(5-1)!]^2}{(2\cdot5-1)!}\cot(x)\sum_{k=0}^{4}\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\csc^{2k}(x)$$

Logo,

$$\int \csc^{10}(x)\,dx = -\frac{128}{315}\cot(x)\sum_{k=0}^{4}\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\csc^{2k}(x)$$

Assim,

$$V = \pi\left[-\frac{128}{315}\cot(x)\sum_{k=0}^{4}\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\csc^{2k}(x)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

Como $\cot\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, o termo superior é nulo, restando:

$$V = \pi[0-(-\frac{128}{315}\cot\left(\frac{\pi}{4}\right)\sum_{k=0}^{4}\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\csc^{2k}\left(\frac{\pi}{4}\right))]$$

Logo,

$$V = \frac{1328\pi}{315}$$

4.3 Modelagem de Um Terreno com Perfis Variáveis

A aplicação prática desenvolvida nesta seção, referente ao modelamento de perfil de terreno e cálculo de volume por sólido de revolução, é apresentada como um exemplo didático e hipotético, com a finalidade de ilustrar o emprego concreto das fórmulas fechadas obtidas em problemas de geometria e engenharia

Em um modelo simplificado de nivelamento de terreno, o perfil transversal de uma faixa do solo é representado por duas funções trigonométricas em intervalos consecutivos, descrevendo diferentes comportamentos de inclinação ao longo do percurso. Considere que o perfil do terreno seja descrito por

$$h(x) = \begin{cases} \sec^4(x), & 0 \le x \le \frac{\pi}{4} \\ 4\cot^4(x), & \frac{\pi}{4} < x \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

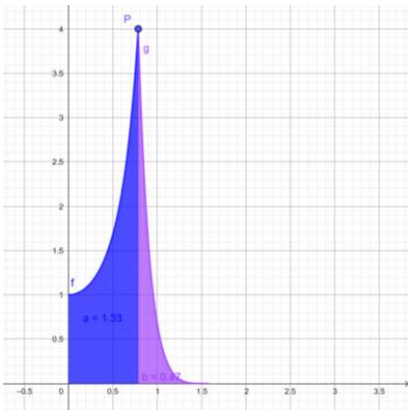
Determine a área total da região compreendida entre o gráfico de $h(x)$ e o eixo das abscissas no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

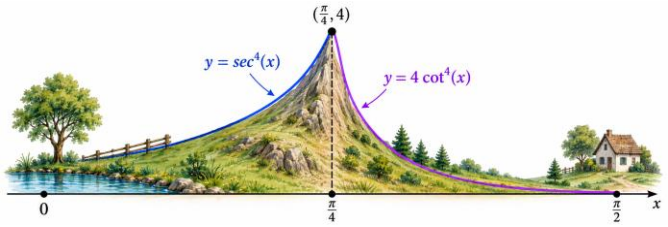
Received: 03/10/2026 - **Accepted:** 07/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/jwf5p985
Pages: 1-36

Figura 2 – Gráfico da Região



Fonte: Autor.

Figura 3 - Terreno



Fonte: Autor.

A área correspondente ao perfil transversal do terreno é dada por

$$A = \int_0^{\pi/4} \sec^4(x)\,dx + 4\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot^4(x)\,dx = A_1 + A_2$$

Vamos inicialmente calcular a parcela A_1, correspondente à função secante. Como queremos integrar $\sec^4(x)$, temos $2n = 4$, de modo que $n = 2$. Substituindo esse valor na fórmula obtida anteriormente para a subsequência par da secante e simplificando, obtemos

$$A_1 = [\tan(x) + \frac{\tan^3(x)}{3}]_0^{\pi/4} = \frac{4}{3}$$

Para a segunda parcela, correspondente à função cotangente, temos

$$A_2 = 4\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot^4(x)\,dx$$

Novamente, como $2n = 4$, segue que $n = 2$. Substituindo esse valor na fórmula obtida para a subsequência par da cotangente, temos

$$A_2 = 4[x + \cot(x) - \frac{\cot^3(x)}{3}]_{\pi/4}^{\pi/2}$$

Avaliando nos limites de integração, $A_2 = 4[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} + 1 - \frac{1}{3}\right)] = \pi - \frac{8}{3}$

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 03/10/2026 - **Accepted:** 07/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/jwf5p985
Pages: 1-36

Portanto, somando as duas parcelas, $\mathrm{A} = \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 = \frac{4}{3} + \pi - \frac{8}{3} = \pi - \frac{4}{3}$

Numericamente, $A \approx 1{,}80826$ unidades de área.

5. Conclusão

Neste trabalho, foi desenvolvido um estudo analítico das integrais trigonométricas das funções secante, cossecante e cotangente, com o objetivo de determinar expressões gerais a partir do uso de relações de recorrência. Para isso, foram utilizados métodos clássicos do cálculo integral, em especial a integração por partes, aliados à teoria de sequências e recorrências lineares na obtenção das fórmulas fechadas.

Inicialmente, foram deduzidas relações de recorrência para cada uma das funções analisadas, permitindo reescrever integrais de ordem superior em termos de integrais de ordem inferior. A partir dessas relações, e com o auxílio de resultados teóricos sobre recorrências, foi possível obter expressões gerais organizadas de acordo com a paridade do índice. No caso das funções secante e cossecante, as soluções apresentaram estruturas semelhantes, envolvendo coeficientes fatoriais e somatórios finitos, enquanto, para a função cotangente, observou-se um comportamento distinto, caracterizado por termos com sinais alternados. Dessa forma, o objetivo proposto foi alcançado, uma vez que as relações recursivas puderam ser convertidas em expressões explícitas para as integrais estudadas.

As fórmulas obtidas foram verificadas em casos particulares ao longo do desenvolvimento, apresentando concordância com resultados clássicos de integração. Além disso, na seção de aplicações, essas expressões foram empregadas em problemas envolvendo integrais definidas, evidenciando sua aplicabilidade.

Além disso, o presente trabalho evidencia a conexão entre diferentes áreas da matemática, como cálculo integral e teoria de sequências, mostrando como ferramentas aparentemente distintas podem ser combinadas para resolver problemas de forma sistemática e estruturada. A metodologia adotada não apenas

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 03/10/2026 - **Accepted:** 07/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/jwf5p985
Pages: 1-36

organiza o cálculo dessas integrais, como também permite identificar padrões e propriedades que não são imediatamente evidentes por métodos tradicionais.

Por fim, destaca-se que a análise desenvolvida se restringe às potências inteiras das funções secante, cossecante e cotangente consideradas neste estudo, de modo que o tema ainda apresenta possibilidades de aprofundamento. Como perspectivas futuras, sugere-se a aplicação da abordagem desenvolvida a outras classes de integrais trigonométricas ou funções mais gerais, bem como o estudo de métodos alternativos de resolução que possam ampliar os resultados obtidos

Tabela 2 - Síntese das fórmulas explícitas obtidas via recorrências lineares

Função e Paridade	Ordem da Potência	Fórmula Explícita Geral
Secante Par	$2n\ (n \geq 1)$	$s_n = \frac{2^{2n-2}[(n-1)!]^2}{(2n-1)!}\tan(x)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\sec^{2k}(x)\ +\ C$
Secante Ímpar	$2n-1\ (n \geq 1)$	$r_n = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-2}[(n-1)!]^2}\left[\ln\ \lvert \sec(x)+\tan(x)\rvert + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{2^{2k-2}[(k-1)!]^2}{(2k-1)!}\sec^{2k-1}(x)\tan(x)\right]\ +\ C$
Cossecante Par	$2n\ (n \geq 1)$	$s_n = -\frac{2^{2n-2}[(n-1)!]^2}{(2n-1)!}\cot(x)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\csc^{2k}(x)\ +\ C$
Cossecante Ímpar	$2n-1\ (n \geq 1)$	$r_n = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-2}[(n-1)!]^2}\left[\ln\ \lvert \tan\left(\frac{x}{2}\right)\rvert - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{2^{2k-2}[(k-1)!]^2}{(2k-1)!}\csc^{2k-1}(x)\cot(x)\right]\ +\ C$
Cotangente Par	$2n\ (n \geq 1)$	$s_n = (-1)^n(x+\cot(x)) + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{n-k}\frac{\cot^{2k+1}(x)}{2k+1}\ +\ C$
Cotangente Ímpar	$2n-1\ (n \geq 1)$	$r_n = (-1)^{n-1}\ln\ \lvert \sin(x)\rvert + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{n-k}\frac{\cot^{2k}(x)}{2k}\ +\ C$

Nota: Para $n = 1$, os somatórios são vazios (nulos).

Fonte: elaboração própria.

6. Referências

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 03/10/2026 - **Accepted:** 07/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/jwf5p985
Pages: 1-36

CASTRO, Fabiano José de. ***Matemática discreta: tópicos de recorrências lineares e suas aplicações***. 2016. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Departamento de Matemática, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2016.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. ***Cálculo A: funções, limite, derivação e integração***. 6. ed. Vol. 1. Porto Alegre: Bookman, 2006.

LIMA, Elon Lages. ***Análise real: volume 1: funções de uma variável***. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

LIMA, E. L; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. ***A Matemática do Ensino Médio.*** Vol. 2, 5. ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2004.

PEREIRA, M. V. ***Recorrências: problemas e aplicações.*** Dissertação (mestrado profissional), Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Universidade de Brasília, Brasília, 2014

ROSEN, Kenneth H. ***Discrete mathematics and its applications***. 7. ed. New York: McGraw-Hill, 2012.

SIMÕES, Diêgo Ayllo da Silva. ***Recorrências: conceitos e aplicações***. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2014.

CC BY