REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 19/06/2026 - **Accepted:** 01/07/2026
Vol: 13.15
DOI: 10.66104/64hdqf16
Pages: 1-36

UMA FERRAMENTA COMPUTACIONAL PARA DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS DE AMOSTRAGEM (k e α) COM BASE NO TESTE DE HETEROGENEIDADE (HT)

A COMPUTATIONAL TOOL FOR DETERMINING SAMPLING PARAMETERS (k and α) BASED ON THE HETEROGENEITY TEST (HT)

UNA HERRAMIENTA COMPUTACIONAL PARA LA DETERMINACIÓN DE LOS PARÁMETROS DE MUESTREO (k y α) BASADA EN EL ENSAYO DE HETEROGENEIDAD (HT)

Jacinto Tchipa Daniel Cumena
Mestre em Tratamento de Minérios na Universidade Federal de Ouro Preto
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1811-7173
E-mail: tchipajacinto@yahoo.com.br

Vladmir Kronemberger Alves
Professor na Universidade Federal de Ouro Preto
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7320-3384
E-mail: vladmir.alves@ufop.edu.br

Resumo

A contínua exaustão de depósitos de altos teores, associada às crescentes exigências do mercado, intensifica a necessidade de um controle de qualidade mais rigoroso e confiável nas operações mineiras. As decisões são frequentemente baseadas em amostras de pequena massa, na ordem de gramas ou quilogramas, coletadas de lotes significativamente maiores, que podem atingir milhares de toneladas. A teoria de amostragem de Pierre Gy é amplamente aplicada a materiais particulados; contudo, sua equação geral requer parâmetros que muitas vezes não estão disponíveis na prática. Nesse contexto, o Teste de Heterogeneidade (HT) tem sido amplamente utilizado para calibração desses parâmetros. O presente trabalho apresenta o desenvolvimento de um software para determinação dos parâmetros k e α, bem como para simulação de protocolos de amostragem utilizando o método HT. O software foi desenvolvido em linguagem Pascal, utilizando o ambiente de desenvolvimento integrado (IDE) Lazarus, incluindo rotinas de regressão linear em escala log-log e cálculo do coeficiente de determinação (R^2). Estudos de caso da literatura foram utilizados para verificação numérica. Os resultados obtidos apresentaram concordância numérica com os dados publicados, com diferenças inferiores a 0,67%, demonstrando a verificação numérica

da ferramenta desenvolvida. O software mostrou-se eficiente no suporte à elaboração e simulação de protocolos de amostragem, proporcionando maior agilidade na tomada de decisão. Como perspectiva futura, recomenda-se a implementação de rotinas computacionais baseadas em modelos de otimização matemática

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 19/06/2026 - **Accepted:** 01/07/2026
Vol: 13.15
DOI: 10.66104/64hdqf16
Pages: 1-36

para o desenvolvimento e a otimização automática de protocolos de amostragem sob restrições operacionais e de precisão.

Palavras-chave: amostragem; teoria de Pierre Gy; Teste de Heterogeneidade; parâmetros de amostragem; desenvolvimento de software.

Abstract

The continuous depletion of high-grade deposits, associated with increasing market demands, has intensified the need for more rigorous and reliable quality control in mining operations. Decision-making is often based on small samples, typically in grams or kilograms, taken from significantly larger lots, which can reach thousands of tons. Pierre Gy's sampling theory is widely applied to particulate materials; however, its general equation requires parameters that are often unavailable in practice. To overcome this limitation, the Heterogeneity Test (HT) has been widely used to calibrate sampling parameters. This study presents the development of a software tool for determining the parameters k and α and for simulating sampling protocols using the HT method. The software was developed in Pascal using the Lazarus integrated development environment (IDE) and includes routines for log-log linear regression and determination of the coefficient of determination (R^2). Case studies from the literature were used for numerical verification. The results showed numerical agreement with published data, with differences below 0,67%, demonstrating the numerical verification of the developed tool. The software proved to be an efficient solution for supporting sampling protocol design and simulation, providing practical decision-making support in mining operations. As a future development, it is recommended to implement computational routines based on mathematical optimization models for the automatic design and optimization of sampling protocols under operational and precision constraints.

Keywords: sampling; Pierre Gy theory; heterogeneity test; sampling parameters; software development.

Resumen

El continuo agotamiento de depósitos de alto tenor, asociado a las crecientes exigencias del mercado, intensifica la necesidad de un control de calidad más riguroso y confiable en las operaciones mineras. Las decisiones se basan frecuentemente en muestras de pequeña masa, del orden de gramos o kilogramos, recolectadas de lotes significativamente mayores, que pueden alcanzar miles de toneladas. La teoría de muestreo de Pierre Gy se aplica ampliamente a materiales particulados; sin embargo, su ecuación general requiere parámetros que muchas veces no están disponibles en la práctica. En este contexto, el Ensayo de

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 19/06/2026 - **Accepted:** 01/07/2026
Vol: 13.15
DOI: 10.66104/64hdqf16
Pages: 1-36

Heterogeneidad (HT) ha sido ampliamente utilizado para la calibración de dichos parámetros. El presente trabajo presenta el desarrollo de un software para la determinación de los parámetros k y α, así como para la simulación de protocolos de muestreo utilizando el método HT. El software fue desarrollado en lenguaje Pascal, utilizando el entorno de desarrollo integrado (IDE) Lazarus, e incluye rutinas de regresión lineal en escala log-log y cálculo del coeficiente de determinación (R^2). Estudios de caso de la literatura fueron utilizados para la verificación numérica. Los resultados obtenidos presentaron concordancia numérica con los datos publicados, con diferencias inferiores al 0,67%, demostrando la verificación numérica de la herramienta desarrollada. El software resultó eficiente en el apoyo a la elaboración y simulación de protocolos de muestreo, proporcionando mayor agilidad en la toma de decisiones. Como perspectiva futura, se recomienda la implementación de rutinas computacionales basadas en modelos de optimización matemática para el diseño y la optimización automática de protocolos de muestreo sujetos a restricciones operativas y de precisión.

Palabras clave: muestreo; teoría de Pierre Gy; ensayo de heterogeneidad; parámetros de muestreo; desarrollo de software.

1. Introdução

O processo de amostragem constitui uma etapa crítica e transversal em diversos segmentos industriais, incluindo as indústrias química, metalúrgica, mineral e farmacêutica, sendo imprescindível para a obtenção de informações qualitativas e quantitativas representativas ao longo das diferentes fases da cadeia produtiva. Sob a perspectiva da teoria da amostragem, amostrar implica a extração de incrementos de uma população de maior dimensão, com o objetivo de compor amostras de menor massa, porém estatisticamente representativas, capazes de permitir inferências confiáveis sobre o lote de origem (Gy, 1992; Pitard, 2019).

A teoria de amostragem de Pierre Gy, consolidada ao longo de décadas de desenvolvimento teórico e experimental, fornece a base matemática para quantificação e controle dos erros associados ao processo amostral em materiais particulados (Gy, 1992; 2004). O erro fundamental de amostragem (FSE — Fundamental Sampling Error) é o erro mínimo irredutível associado à heterogeneidade constitucional do material, e sua variância é expressa pela equação geral de Pierre Gy, que incorpora parâmetros mineralógicos e granulométricos (Pitard, 2004; Holmes, 2004).

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 19/06/2026 - **Accepted:** 01/07/2026
Vol: 13.15
DOI: 10.66104/64hdqf16
Pages: 1-36

Apesar de sua relevância, a aplicação prática da equação geral de Gy é frequentemente dificultada pela indisponibilidade dos parâmetros mineralógicos necessários, como os fatores de forma, composição e densidade dos minerais de interesse e de ganga. Nesse contexto, o Teste de Heterogeneidade (HT) surge como alternativa consolidada para a calibração empírica dos parâmetros k e α, que representam, respectivamente, a constante de heterogeneidade do material e o expoente granulométrico da relação entre a heterogeneidade intrínseca do lote (IH_L) e o diâmetro nominal (d_N) das partículas (Chieregati; Pitard, 2018; Minnitt et al., 2022).

A determinação manual dos parâmetros k e α pelo método HT envolve múltiplas etapas de cálculo, incluindo o cálculo do IH_L por faixa granulométrica, a transformação logarítmica dos pares (d_N, IH_L) e a aplicação de regressão linear em escala log-log, sendo suscetível a erros de transcrição, arredondamento e inconsistências operacionais (Chieregati, 2024; Prado et al., 2024). A automação desse processo por meio de ferramentas computacionais representa, um avanço relevante para a reprodutibilidade e confiabilidade dos resultados (Magalhães et al., 2023; Fernandes et al., 2020).

O presente trabalho apresenta o desenvolvimento de um módulo computacional denominado AMINGY-HT, implementado em linguagem Pascal com o IDE Lazarus 2.2.6, voltado à determinação dos parâmetros k e α pelo método HT, à simulação de protocolos de amostragem e à estimativa da massa mínima representativa. A escolha da linguagem Pascal e do IDE Lazarus foi em função da estabilidade da plataforma, pela facilidade de geração de executáveis nativos para Windows sem dependências externas e principalmente pela interface gráfica amigável para o usuário. O software é compatível com sistemas operacionais Windows 7 ou superior (64 bits).

A verificação numérica do software foi realizada por comparação com estudos de caso publicados na literatura: minério de ouro (Olivé, 2019), minério de willemita (Vargas et al., 2016), e resultados experimentais monotamanho de Prado et al., (2024).

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 19/06/2026 - **Accepted:** 01/07/2026
Vol: 13.15
DOI: 10.66104/64hdqf16
Pages: 1-36

2. Revisão da Literatura

2.1 Heterogeneidade e homogeneidade

Os conceitos de homogeneidade e heterogeneidade constituem pilares fundamentais da Teoria da Amostragem, desempenhando papel central na compreensão e quantificação dos erros amostrais. Do ponto de vista teórico, a homogeneidade corresponde à condição ideal de heterogeneidade nula, situação que, na prática, não se verifica de forma absoluta. Uma distribuição pode aparentar homogênea em determinada escala de observação; contudo, à medida que se aumenta o nível de resolução analítica, tornam-se evidentes variações cada vez mais sutis, revelando a natureza intrinsecamente heterogênea dos materiais.

Em depósitos minerais, propriedades como teor, densidade e umidade apresentam variações espaciais ao longo das diferentes direções, configurando um comportamento tipicamente anisotrópico e heterogêneo. De acordo com Gy (2004), um lote pode ser considerado homogêneo apenas quando todas as unidades que o compõem são estritamente idênticas, condição que raramente é observada em sistemas reais. Consequentemente, um lote é classificado como heterogêneo sempre que tal condição não é atendida. Nesse contexto, a heterogeneidade é reconhecida como a principal fonte de erros na amostragem (Lyman, 2022; Dubé & Esbensen, 2022).

Considerando-se o teor de um elemento de interesse (a_i) em um lote zero-dimensional, cuja média geométrica da população (L) é dada por $\bar{a}_i$, sendo a_L o teor do lote e h_i a heterogeneidade de cada fragmento F_i em relação a população amostral, é razoável assumir que a heterogeneidade de cada fragmento pode ser dada pela diferença $a_i - a_L$. A diferença entre o teor do i-ésimo fragmento pelo teor do lote resulta em um valor dimensional (com unidade), porém, é de prática comum se trabalhar com valores relativos (adimensionais), neste sentido, a heterogeneidade de cada fragmento pode ser dada conforme a Equação (1):

$$h_i = \frac{a_i - a_L}{a_L} \quad (1)$$

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 19/06/2026 - **Accepted:** 01/07/2026
Vol: 13.15
DOI: 10.66104/64hdqf16
Pages: 1-36

De acordo com Pitard (2019), considerando a flutuação de heterogeneidade observada na escala do lote como um todo, o valor de h_i é diretamente proporcional à massa. Adicionando-se o efeito da massa de cada fragmento ($\overline{M}_i$) e considerando valores relativos, tem-se:

$$h_i = \left(\frac{a_i - a_L}{a_L}\right) \times \frac{M_i}{\overline{M}_i} \qquad (1.1)$$

Uma vez que o lote é composto por uma quantidade finita de fragmentos, então, a massa do lote é o produto da massa média dos fragmentos pelo número total de fragmentos que compõem o lote ($M_L = \overline{M}_i \times N_F \Rightarrow \overline{M}_i = \frac{M_L}{N_F}$), substituindo na Equação 1.1, tem-se:

$$h_i = N_F \left(\frac{a_i - a_L}{a_L}\right) \times \frac{M_i}{M_L} \quad (1.2)$$

O primeiro momento (média) de h_i é dado pela razão entre o somatório de h_i com i variando de 1 a m, pelo número de fragmentos N_F, dada conforme a Equação (2):

$$m(h_i) = \frac{\sum_{i=1}^{m} h_i}{N_F} \quad (2)$$

Considerando a definição de variância de uma variável aleatória e substituindo a Equação 1.2 na Equação 2, a variância devido à heterogeneidade de cada fragmento do lote $s^2(h_i)$ pode ser dada conforme a Equação (3):

$$s^2(h_i) = \frac{\sum_{i=1}^{m} {h_i}^2}{N_F} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \left[N_F \left(\frac{a_i - a_L}{a_L}\right) \times \frac{M_i}{M_L}\right]^2}{N_F}$$

$$\Rightarrow s^2(h_i) = N_F \sum_{i=1}^{m} \left[\left(\frac{a_i - a_L}{a_L}\right) \times \frac{M_i}{M_L}\right]^2 \qquad (3)$$

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 19/06/2026 - **Accepted:** 01/07/2026
Vol: 13.15
DOI: 10.66104/64hdqf16
Pages: 1-36

2.1.1 Heterogeneidade constitucional (CH)

Define-se heterogeneidade constitucional (CH) como aquela associada às diferenças intrínsecas entre os constituintes de uma população, sendo inerente ao material e independendo de sua disposição espacial.

A heterogeneidade constitucional do lote L (CH_L) é matematicamente equivalente à variância $s^2(h_i)$, conforme a Equação (4):

$$CH_L = s^2(h_i) = N_F \sum_{i=1}^{m} \left[\left(\frac{a_i - a_L}{a_L}\right) \times \frac{M_i}{M_L}\right]^2 \quad (4)$$

Em geral não se conhece o número de fragmentos $\mathrm{N_F}$ no lote amostral. Convém, portanto, a eliminação desse termo, introduzindo-se o "fator constante de heterogeneidade constitucional" ou "heterogeneidade intrínseca/invariante" ($\mathrm{IH_L}$), dado conforme a Equação (5):

$$IH_L = CH_L \frac{M_L}{N_F} = CH_L \bar{M}_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{(a_i - a_L)^2 {M_i}^2}{{a_L}^2 M_L} \quad (5)$$

De modo geral, a heterogeneidade constitucional está presente em todos os lotes, pois é determinada pelas propriedades intrínsecas e pela natureza dos constituintes que compõem o material. Essa heterogeneidade constitui a base do erro fundamental de amostragem (Fundamental Sampling Error – FSE), cuja magnitude é influenciada, entre outros fatores, pelo grau de cominuição. Conforme estabelecido por Gy (2004), o erro fundamental corresponde ao menor erro teoricamente alcançável em um procedimento amostral.

2.2 Teoria de Pierre GY

No ano de 1950, o químico e estatístico Pierre Maurice Gy desenvolveu uma teoria que se consolidaria como uma das mais utilizadas e relevantes para a determinação de massa mínima e para simulação de protocolos de amostragem. No escopo dessa formulação, assume-se que o material a ser amostrado encontra-se

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 19/06/2026 - **Accepted:** 01/07/2026
Vol: 13.15
DOI: 10.66104/64hdqf16
Pages: 1-36

completamente homogeneizado, que os erros associados aos dispositivos e procedimentos de amostragem são nulos e que há equiprobabilidade de seleção entre as partículas constituintes do lote. Sob tais condições, o erro total de amostragem passa a ser atribuído, essencialmente, ao erro fundamental de amostragem (Góes et al., 2010). A fórmula geral de Pierre Gy é expressa pela Equação (6):

$$S_a{}^2 = \sigma_{FSE}{}^2 = f g c \ell \left(\frac{1}{M_S} - \frac{1}{M_L}\right) d_N{}^3 \quad (6)$$

Em que d_N representa o diâmetro máximo (ou nominal) das partículas do material a ser amostrado, adotando-se, para fins operacionais, d_{95} expresso em centímetros; c corresponde ao fator de composição mineralógica, com unidade $g\,cm^{-3}$; M_S denota a massa mínima da amostra (g); e M_L a massa do lote a ser amostrado (g). Adicionalmente, $\boldsymbol{\ell}$ o fator de liberação mineral (adimensional); f o fator de forma das partículas (adimensional); e g o fator associado à distribuição granulométrica (adimensional). Dada dificuldade prática da determinação de todos os fatores, o método HT agrupa os fatores nos parâmetros k = f·g·c·l e α, determinados empiricamente (Chieregati, 2023a; Minnitt et al., 2022).

Extensões e refinamentos da equação de Pierre Gy têm sido propostos na literatura recente. Svensmark (2022) propôs a "fórmula estendida de Gy", incorporando efeitos de segregação e agrupamento. Minkkinen e Esbensen (2019) discutiram modificações teóricas dos fatores de agrupamento e segregação para materiais com heterogeneidade espacial significativa. Marcotte e Dutaut (2021) estabeleceram conexões entre a fórmula de Pierre Gy e estatísticas de duplicatas em controle de qualidade analítico.

2.3 Aproximação dos parâmetros de Pierre GY

Sob a hipótese de lote amostral muito grande (isto é, $\frac{1}{M_L} \to 0$), a equação 6 pode ser reescrita da seguinte forma:

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 19/06/2026 - **Accepted:** 01/07/2026
Vol: 13.15
DOI: 10.66104/64hdqf16
Pages: 1-36

$$\sigma_{FSE}^2 = IH_L \frac{d_N^3}{M_S} \qquad (7)$$

Em que IH_L representa a constante de heterogeneidade constitucional (conforme a Equação 5). Esta simplificação permite a calibração prática dos parâmetros k e α a partir de dados experimentais do teste HT.

2.3.1 Teste de heterogeneidade (HT) e Determinação de k e α

O teste de heterogeneidade (HT) foi originalmente proposto por Pierre Gy e posteriormente modificado por Pitard (Villanova, 2018). Trata-se de um procedimento experimental que permite calibrar os parâmetros k e α por meio da estimativa da heterogeneidade intrínseca/constitucional do lote (IH_L) em faixas granulométricas estreitas, geralmente coincidentes com as classes de tamanho utilizadas nas etapas de coleta, britagem e pulverização do protocolo de amostragem vigente. Estudos recentes têm proposto automação do procedimento de seleção de fragmentos, reduzindo vieses humanos e melhorando a reprodutibilidade dos resultados (Prado et al., 2024).

No teste HT, o material amostrado é, em geral, peneirado em pelo menos quatro faixas granulométricas, homogeneizado e disposto em matrizes quadradas sobre uma mesa plana, de forma a favorecer a equiprobabilidade de seleção dos fragmentos. A estimativa do fator IH_L pode ser simplificada ao se expressar a Equação (5) como um somatório duplo em termos de classes granulométricas e de densidade, resultando na Equação (8):

$$IH_L = \sum_{\alpha} V_\alpha \sum_{\beta} \left[\lambda_\beta \frac{(a_{\alpha\beta} - a_L)^2 M_{L\alpha\beta}}{a_L^2 M_L} \right] \qquad (8)$$

onde V_α é o volume médio dos fragmentos na fração granulométrica α, λ_β é a densidade da partícula na classe de densidade β, $a_{\alpha\beta}$ é o teor do elemento em

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 19/06/2026 - **Accepted:** 01/07/2026
Vol: 13.15
DOI: 10.66104/64hdqf16
Pages: 1-36

estudo em determinada faixa de densidade e granulométrica, e $M_{L\alpha\beta}$ a massa correspondente à combinação (α, β).

De acordo com Pitard (2004), a variação do teor $a_{\alpha\beta}$ é, em muitos casos, mais influenciada pela variação de densidade do que pela variação granulométrica. Com essa hipótese, a Equação (8) pode ser reescrita como produto de dois fatores X e Y, conforme a Equação (9):

$$IH_L = XY = \left[\sum_{\alpha}\left(V_\alpha \frac{M_{L\alpha}}{M_L}\right)\right]\left[\sum_{\beta}\left(\lambda_\beta \frac{(a_\beta - a_L)^2 M_{L\beta}}{a_L^2 M_L}\right)\right] \qquad (9)$$

O fator X pode ser expresso pelo produto $f \cdot g \cdot d^3$ ao passo que o fator Y pode ser associado ao produto $c \cdot l$. Segundo Pitard (2019), o volume das partículas em uma fração granulométrica α é proporcional ao produto do fator de forma com o cubo do topsize: $V_\alpha = f_\alpha\, d_\alpha^3$. Simplificando-se V_α, obtém-se a expressão principal para determinação de IH_L, conforme a Equação (10):

$$IH_L = g \sum_{\beta} \frac{(a_\beta - a_L)^2 M_{L\beta}^2}{a_L^2 M_L} \qquad (10)$$

O fator de distribuição granulométrica (g), traduz o grau de estreitamento da distribuição de tamanhos, variando de 0 a 1. Para fins práticos, Gy (1992) e Holmes (2004) indicam a relação expressa na Equação (11):

$$g = \begin{cases} 0{,}25, & \text{se } d_{95}/d_5 > 4 \\ 0{,}50, & \text{se } 2 \le d_{95}/d_5 \le 4 \\ 0{,}75, & \text{se } d_{95}/d_5 < 2 \\ 1{,}00, & \text{se } d_{95}/d_5 = 1 \end{cases} \qquad (11)$$

Chieregati (2018) e Gy (1992) recomendam, como diretriz prática, $g = 0{,}25$ para materiais não calibrados (p.ex., produtos de britagem), $g = 0{,}55$ para materiais

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 19/06/2026 - **Accepted:** 01/07/2026
Vol: 13.15
DOI: 10.66104/64hdqf16
Pages: 1-36

com maior homogeneidade de tamanhos (frações entre duas malhas de peneiramento) e $g = 0{,}75$ para materiais com distribuição naturalmente homogênea, como grãos e cereais. É recomendável a análise de sensibilidade do impacto da variação do fator g nos resultados dos parâmetros k e α.

Conforme Villanova (2018), o número de fragmentos (n) a serem coletados para cada faixa granulométrica deve ser superior a dez vezes o produto entre o número de fragmentos por grupo (Q) e o número de grupos (p), conforme a Equação (12):

$$n > 10 \cdot Q \cdot p \quad (12)$$

Para a determinação das constantes k e α via teste HT, estima-se IH_L para cada faixa granulométrica e constrói-se um gráfico di-log correlacionando $EST\ IH_L$ com o diâmetro nominal das partículas d_N, resultando na seguinte lei de potência:

$$IH_L = k\, d_N^{\alpha} \quad (13)$$

Rearranjando e ampliando o logaritmo natural nos dois membros, tem-se:

$$ln(IH_L) = ln(k) + \alpha \times ln\,(d_N) \quad (14)$$

O diâmetro nominal das partículas é calculado conforme a Equação (15):

$$d_N = \sqrt[3]{\frac{d_{\max} + d_{\min}}{2}} \qquad (15)$$

De acordo com Pitard (2004), para elementos-traço (por exemplo, ouro não liberado), considerando uma operação de seleção aleatória de Q fragmentos, em que cada fragmento q é pesado gerando massa M_q e os grupos são analisados para obtenção do teor a_q, o valor de IH_L pode ser estimado conforme a Equação (16):

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 19/06/2026 - **Accepted:** 01/07/2026
Vol: 13.15
DOI: 10.66104/64hdqf16
Pages: 1-36

$$IH_L = g\left[\frac{\sum_q (a_q - a_Q)^2 M_q^2}{a_Q^2 M_Q}\right] \qquad (16)$$

Em que M_Q e a_Q são dados, respectivamente, pelas Equações (17) e (18):

$$M_Q = \sum_{q=1}^{n} M_q \qquad (17)$$

$$a_Q = \frac{\sum_{q=1}^{n} a_q \ M_q}{M_Q} \qquad (18)$$

Comparações recentes entre o teste HT padrão e a análise simplificada *segregation-free* (SFA) demonstraram diferenças significativas, especialmente para sistemas de ouro com efeito pepita expressivo, reforçando a necessidade de escolha criteriosa do método de calibração em função das características do minério (Chieregati et al., 2023b).

2.3.2 Escopo de Aplicação e Restrições do Módulo HT

O módulo HT do software AMINGY-HT destina-se à calibração dos parâmetros k e α para materiais particulados em que a heterogeneidade constitucional é dominante e as hipóteses da teoria de Pierre Gy são razoavelmente satisfeitas. O método é mais adequado para:

(a) Materiais com distribuição granulométrica bem definida e faixas distintas;

(b) Minérios com composição mineralógica relativamente estável entre faixas;

(c) Situações em que o efeito pepita (nugget effect) não é dominante.

O uso do método HT padrão pode ser inadequado em materiais com forte efeito pepita, como minérios auríferos de alta variabilidade, onde a Análise Simplificada Livre de Segregação (SFA, Simplified Segregation Free Analysis) pode ser mais apropriada (Chieregati et al., 2023b; Villanova, 2018). Em casos de efeito pepita ou distribuição granulométrica muito estreita ($d_{95}/d_5 \approx 1$), os resultados

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 19/06/2026 - **Accepted:** 01/07/2026
Vol: 13.15
DOI: 10.66104/64hdqf16
Pages: 1-36

devem ser interpretados com cautela. O software não substitui o julgamento técnico do especialista em amostragem.

3. Metodologia

Para a concepção do software foram desenvolvidas rotinas para determinação dos parâmetros k e α via regressão linear, assim como para determinação do coeficiente de determinação de Pearson R^2, MSE e MAE para verificação do ajuste dos dados experimentais ao modelo nas diferentes faixas granulométrica (métricas aplicadas ´quando se tem três ou mais faixas granulométricas, caso contrário deve-se informar o valor estimado de α para determinação do fator k pela equação 13).

O software AMINGY foi desenvolvido em linguagem Pascal, utilizando o IDE Lazarus versão 2.2.6 (Free Pascal Compiler 3.2.2), sob sistema operacional Windows 10 (64 bits). A escolha do Pascal/Lazarus justifica-se por: (1) estabilidade e maturidade da plataforma para aplicações técnico-científicas; (2) geração de executáveis nativos sem dependências externas, facilitando a distribuição; (3) e interface gráfica nativa e amigável para o usuário; O software é compatível com Windows 7 ou superior, sem necessidade de instalação de bibliotecas adicionais.

Partindo da equação 14 (linearizada), chega-se nas equações normais para determinação dos parâmetros α e k pelo método HT via regressão linear de mínimos quadrados ordinários (OLS):

$$\alpha = \frac{n\sum_{i=1}^{n}[\ln(d_{Ni})\times\ln(IHLi)]-\sum_{i=1}^{n}\ln(d_{Ni})\sum_{i=1}^{n}\ln(IHLi)}{n\sum_{i=1}^{n}[\ln(d_{Ni})]^2-\left[\sum_{i=1}^{n}\ln(d_{Ni})\right]^2} \qquad (19)$$

e

$$k = e^{\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\ln(IHLi)-\alpha\sum_{i=1}^{n}\ln(d_{Ni})\right]} \qquad (20)$$

O coeficiente de determinação (R²) do ajuste do modelo aos dados pode ser determinado conforme a Equação (21):

$$R^2 = \frac{\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\ln(d_{Ni})-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(d_{Ni})\right)\times\ln(IHLi)\right]^2}{\sum_{i=1}^{n}\left[\ln(d_{Ni})-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(d_{Ni})\right]^2\times\sum_{i=1}^{n}\left[\ln(IHLi)-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(IHLi)\right]^2} \qquad (21)$$

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 19/06/2026 - **Accepted:** 01/07/2026
Vol: 13.15
DOI: 10.66104/64hdqf16
Pages: 1-36

Com o objetivo de quantificar a magnitude dos desvios aos dados experimentais, foram empregadas as métricas Erro Absoluto Médio (Mean Absolute Error, MAE) e Erro Quadrático Médio (Mean Squared Error, MSE).

O Erro Absoluto Médio (MAE) é calculado conforme a equação 22:

$$MAE = \left(\frac{1}{n}\right) \times \Sigma|yi - \hat{y}i| \quad (22)$$

onde n corresponde ao número de observações, yi ao valor esperado e $\hat{y}i$ o valor calculado.

O MAE representa a magnitude média dos desvios observados entre os valores calculados e os valores de referência, mantendo as unidades da variável analisada. O Erro Quadrático Médio (MSE), é definido por:

$$MSE = \left(\frac{1}{n}\right) \times \Sigma(yi - \hat{y}i)^2 \quad (23)$$

O MSE utiliza os erros elevados ao quadrado, atribuindo maior peso a discrepâncias de maior magnitude. Como consequência, essa métrica é particularmente sensível à presença de erros significativos ou valores discrepantes. Enquanto o MAE fornece uma medida direta do erro médio, o MSE permite avaliar a existência de desvios pontuais que possam comprometer a confiabilidade do modelo.

3.1 Descrição do Algoritmo e Tratamento de Entradas Inválidas

O módulo HT do software executa uma sequência estruturada de etapas para determinação da heterogeneidade intrínseca do lote (IHL), obtenção dos parâmetros da equação de Pierre Gy (k e α), simulação do protocolo de amostragem e estimativa da massa mínima requerida. Antes de qualquer processamento, todas as entradas são submetidas a verificações de consistência para evitar propagação de erros numéricos.

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 19/06/2026 - **Accepted:** 01/07/2026
Vol: 13.15
DOI: 10.66104/64hdqf16
Pages: 1-36

1. Leitura e validação dos parâmetros gerais, incluindo número de faixas granulométricas em análise (N_FAIXAS > 0), fator g > 0 e desvio padrão relativo máximo admissível (DVP_max > 0).

2. Leitura das massas (M_q) e teores (a_q) das partículas pertencentes a cada faixa granulométrica, verificando-se a inexistência de campos vazios e a presença de massas não negativas.

3. Cálculo da massa total por faixa e da concentração média ponderada (a_L), com verificação da validade do denominador da equação.

4. Determinação da heterogeneidade intrínseca experimental (IHL) para cada faixa granulométrica, com verificação de que $a_L^2 \cdot$ML > 0.

5. Leitura dos limites granulométricos de cada faixa e cálculo do diâmetro nominal d_N.

6. Para conjuntos contendo menos de três faixas granulométricas, o parâmetro α é informado diretamente pelo usuário. Para três ou mais faixas, os pares (d_N, IHL) são transformados para escala logarítmica e submetidos à regressão linear pelo método dos mínimos quadrados ordinários.

7. Antes da regressão, o algoritmo verifica se todos os valores satisfazem d_N, > 0 e IHL > 0, garantindo a validade da transformação logarítmica natural.

8. O coeficiente angular da regressão fornece o parâmetro α, enquanto o intercepto fornece a constante de amostragem K. O coeficiente de determinação (R^2) é posteriormente calculado para avaliação do ajuste.

9. Com os parâmetros obtidos, o software calcula a variância associada a cada etapa do protocolo de amostragem, os desvios relativos correspondentes e as métricas de erro MAE e MSE.

10. Finalmente, é realizada a simulação da evolução da variância em função da massa amostral e a determinação da massa mínima requerida para atender ao limite de precisão especificado pelo usuário.

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 19/06/2026 - **Accepted:** 01/07/2026
Vol: 13.15
DOI: 10.66104/64hdqf16
Pages: 1-36

Caso seja identificado campo vazio, valor não numérico, massa negativa, valor não positivo em transformação logarítmica ou denominador numericamente nulo durante a regressão, o software exibe mensagem explicativa ao usuário e interrompe imediatamente a execução do cálculo. Para prevenção de instabilidades numéricas, a verificação dos denominadores da regressão utiliza tolerância computacional de 1×10^{-12}.

A verificação numérica do software foi realizada com base à aplicação dos estudos de casos apresentados no próximo tópico. O algoritmo completo em portugol pode ser consultado no Apêndice A.

3.2 Teste HT - Minério de Ouro (Olivé, 2019)

Pretende-se avaliar a heterogeneidade de um minério de ouro. Para o efeito, realizou-se amostragem e determinou-se primeiramente as constantes de amostragem k e α, com a posterior elaboração do protocolo de amostragem, permitindo a avaliação de forma acurada da variância em todas as etapas de amostragem. A massa amostrada foi britada 100% < 20 mm em um britador de mandíbula, e peneirada em quatro frações granulométricas. Cada faixa granulométrica foi dividida em 50 grupos, representando 50 amostras, as quais foram pesadas e encaminhadas para determinação do teor de ouro. Com o fator de granulometria $g = 0{,}55$ para materiais peneirados entre duas malhas, o autor determina o valor de IH_L para cada fração granulométrica. Os dados de $\mathbf{IH_L}$ e $\mathbf{d_N}$ determinados pelo autor são ilustrados na Tabela 1.

Tabela 1 – Valores para determinação direta dos parâmetros k e α.

Faixa granulométrica (mm)	dN (cm)	IHL
-4,75 +3,35	0,42	5,71
-6,35 +4,75	0,57	8,60
-12,5 +6,35	1,03	89,40
-25,5 +12,5	2,09	250,30

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 19/06/2026 - **Accepted:** 01/07/2026
Vol: 13.15
DOI: 10.66104/64hdqf16
Pages: 1-36

Fonte: Olivé (2019).

Com os dados da Tabela 1, o autor chega nos parâmetros k = 49,49, α = 2,51 e R^2 = 95,74%. O protocolo de amostragem elaborado pelo autor é ilustrado na Tabela 2.

Tabela 2 – Protocolo de amostragem do 1º Teste HT.

Estágio	Massa inicial (kg)	Massa final (kg)	dN (cm)	IHL	Var. Rel.	Desv. Rel.
Amostragem primária	30,00	5,00	0,30	2,41	4,0E-04	2,01%
Quarteamento primário	5,00	3,00	0,30	2,41	3,2E-04	1,79%
Quarteamento secundário	3,00	0,30	0,30	2,41	8,0E-03	8,51%
Pulverização	0,30	0,30	0,01	0,00	0,0E+00	0,00%
Análise química	0,30	0,03	0,01	0,00	7,0E-06	0,26%

Fonte: Olivé (2019).

3.3 Teste HT – Minério de Willemita (Vargas et al., 2016)

O caso consiste na realização do teste de heterogeneidade com minério de willemita para determinação dos parâmetros k e α, assim como na simulação do protocolo de amostragem. Realizou-se amostragem na etapa de britagem na usina de concentração de Vazante. O material amostrado foi classificado em quatro faixas granulométricas. O material de cada faixa granulométrica foi disposto em mesa plana proporcionando a equiprobabilidade de seleção dos fragmentos. Com o material disposto na mesa dividiu-se em matrizes quadradas e coletou-se 50 amostras compostas por 50 fragmentos para cada fração. As amostras foram pesadas e submetidas a análise química para determinação dos teores de zinco. Os valores de $\mathbf{d_N}$ e $\mathbf{IH_L}$ determinados pelos autores são ilustrados na Tabela 3.

Tabela 3 – Faixas granulométricas e valores para determinação de k e α.

Faixa granulométrica (cm)	dN (cm)	EST. IHL
-0,475 +0,335	0,42	0,48

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 19/06/2026 - **Accepted:** 01/07/2026
Vol: 13.15
DOI: 10.66104/64hdqf16
Pages: 1-36

-0,635 +0,475	0,57	1,31
-1,27 +0,635	1,05	13,19
-2,54 +1,27	2,10	30,41

Fonte: Vargas *et al.*, (2016).

Com os dados da Tabela 3, os autores determinam os parâmetros $k = 6{,}155$, $\alpha = 2{,}6378$ e coeficiente de determinação $R^2 = 94{,}74\%$. Com os parâmetros de amostragem determinados, os autores elaboraram um protocolo de amostragem otimizado com desvio padrão relativo total de 6,01%. A Tabela 4 ilustra o protocolo de amostragem antes da otimização, ao passo que a Tabela 5 ilustra o protocolo após a otimização. Nota-se que o autor reduziu o erro total de 13,4% para 6,01%.

Tabela 4 – Protocolo de amostragem antes da otimização.

Estágio	Massa inicial (kg)	Massa final (kg)	dN (cm)	IHL	Var. Rel.	Desv. Rel.
Amostragem primária	16.000,00	5,00	0,95	5,38	1,1E-03	3,28%
Quarteamento (Jones)	5,00	0,30	0,95	5,38	1,7E-02	12,98%
Moagem de disco	0,30	0,30	0,03	5,9E-04	0,0E+00	0,00%
Quarteamento	0,30	0,02	0,03	5,9E-04	2,8E-05	0,53%
Pulverização	0,02	0,02	0,01	1,5E-05	0,0E+00	0,00%
Amostra analítica	0,02	0,02	0,01	1,5E-05	0,0E+00	0,00%
Total					1,8E-02	13,40%

Fonte: Vargas *et al.*, (2016).

Tabela 5 – Protocolo de amostragem após otimização (Vargas et al., 2016)

Estágio	Massa inicial (kg)	Massa final (kg)	dN (cm)	IHL	Var. Rel.	Desv. Rel.
Amostragem primária	1.000.000,00	5,00	0,95	5,38	1,1E-03	3,28%
Quarteamento (Jones)	5,00	1,50	0,95	5,38	2,5E-03	5,01%
Moagem de disco	1,50	1,50	0,03	0,0E+00	0,0E+00	0,00%

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 19/06/2026 - **Accepted:** 01/07/2026
Vol: 13.15
DOI: 10.66104/64hdqf16
Pages: 1-36

Quarteamento	1,50	0,02	0,03	5,9E-04	2,9E-05	0,54%
Pulverização	0,02	0,02	0,0074	1,5E-05	0,0E+00	0,00%
Amostra analítica	0,02	0,02	0,0074	1,5E-05	0,0E+00	0,00%
Total	-				3,6E-03	6,01%

Fonte: Vargas *et al*., (2016)

As primeiras massas (16.000kg e 1.000.000kg) dos protocolos de amostragem representam as massas do lote.

O autor destaca a redução do erro amostral de 12,98% para 5,01% apenas mudando o tamanho da alíquota de 1,5Kg ao invés de 300g na etapa de quarteamento (Jones), sem a necessidade de investimentos nem adição de nova etapa no protocolo de amostragem.

3.4 Uma Abordagem Automatizada para o Teste de Heterogeneidade visando à Otimização de Protocolos de Amostragem (Prado et al., 2024)

Prado, Chieregati e Dominy (2024), desenvolveram um equipamento automatizado para execução do Teste de Heterogeneidade (HT) utilizando partículas de grão-de-bico coloridas para simular mineralizações de ouro, cobre, chumbo e zinco. Os autores calcularam os valores de EST.IHL e da constante K adotando diâmetro médio de 1,2 cm e α fixo igual a 2,5. Foram simulados doze ensaios realizados e comparados com as saídas do software. Usou-se o desvio relativo para comparar as diferenças $(desvio = ((valor_software - valor\ referência))/(valo\ referência) \times 100$.

A Tabela 6 apresenta as estatísticas descritivas dos ensaios L01, L02 e L03 realizados por Prado et al. (2024), incluindo o número total de partículas coletadas, a quantidade de partículas representativas do mineral de interesse, bem como medidas de dispersão associadas à distribuição de partículas entre as 50 subamostras geradas pelo equipamento. Os resultados foram utilizados pelos autores para avaliar a repetibilidade, a estabilidade operacional e a precisão do sistema automatizado de seleção de partículas (IHT). Os baixos valores de

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 19/06/2026 - **Accepted:** 01/07/2026
Vol: 13.15
DOI: 10.66104/64hdqf16
Pages: 1-36

coeficiente de variação observados indicam boa uniformidade na formação das subamostras e demonstram que o equipamento foi capaz de reproduzir adequadamente as condições necessárias para a execução do Teste de Heterogeneidade.

Tabela 6 - Estatística descritiva dos ensaios.

Resultados	Teste L01	Teste L02	Teste L03
Partículas coletadas	4.537,00	4.468,00	4.523,00
Partículas azuis coletadas	5,00	4,00	5,00
Número máximo de partículas por subamostra	96,00	94,00	96,00
Número mínimo de partículas por subamostra	87,00	85,00	85,00
Número médio de partículas por subamostra	90,74	89,36	90,46
Variância	3,67	3,47	5,49
Variância relativa	4,5E-04	4,4E-04	6,7E-04
Desvio padrão	1,94	1,88	2,37
Coeficiente de variação	2,13%	2,11%	2,62%

Fonte: Prado *et al*., (2024).

Em geral para determinação dos fatores k e α, é necessário regressão com os dados de mais de três faixas granulométricas. No caso em questão, os autores utilizam uma faixa apenas, com efeito, para esse caso é necessário inserir no software o valor estimado de α para determinar o fator k pela equação 13.

4. Resultados e Discussão

4.1 Janela do software

A janela do software é mostrada na Figura 1, servindo para o cálculo dos parâmetros k e α pelo teste de heterogeneidade HT, simulação de protocolos de amostragem e determinação da massa mínima representativa.

No campo 1, a seleção do número de faixas e do fator de distribuição granulométrica para o caso em análise. No campo 2, a tabela para inserção dos resultados relativos às massas e teores do respectivo teste. No campo 3, a inserção das faixas granulométricas utilizadas no teste. O cálculo do diâmetro nominal relativo aos materiais nas diferentes faixas requer a entrada da maior malha na coluna "<XXX cm" e da menor malha na coluna ">YYY cm". No campo 4, a simulação do protocolo de amostragem, retornando o desvio padrão relativo referente a cada etapa. No

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 19/06/2026 - **Accepted:** 01/07/2026
Vol: 13.15
DOI: 10.66104/64hdqf16
Pages: 1-36

campo 5, a exibição gráfica da variação do desvio padrão relativo em função da massa mínima representativa. Nos campos 8 e 9, são retornados os dados para determinação direta dos parâmetros k e α por regressão linear e os valores de MAE e MSE.

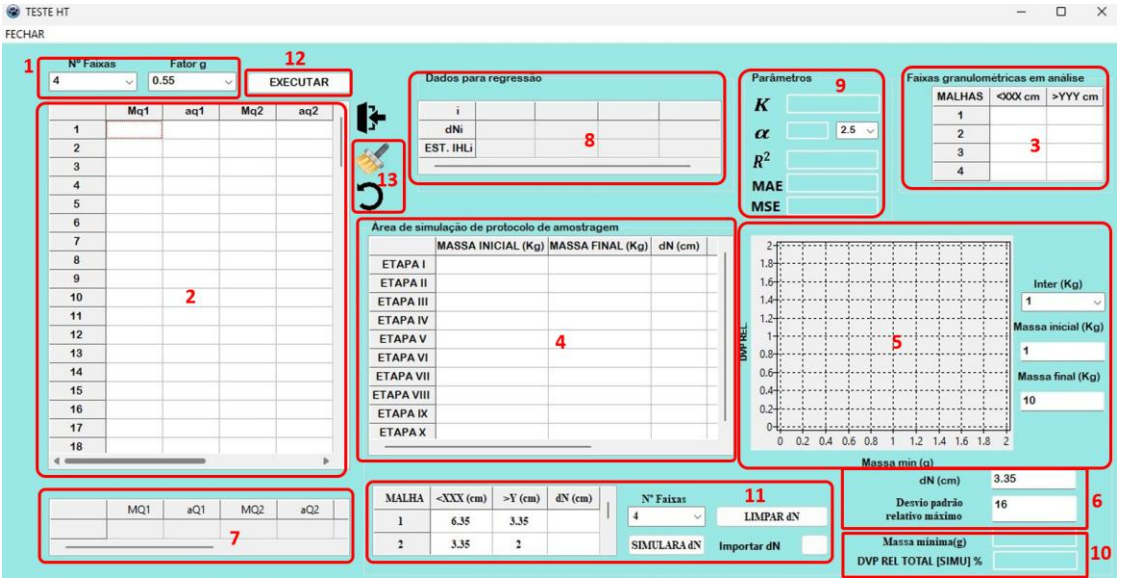

Figura 1 - Determinação dos parâmetros k e α, massa mínima e simulação do protocolo de amostragem pelo teste de heterogeneidade HT. Janela II do software AMINGY 1.02. Fonte: elaborado pelos autores (2026)

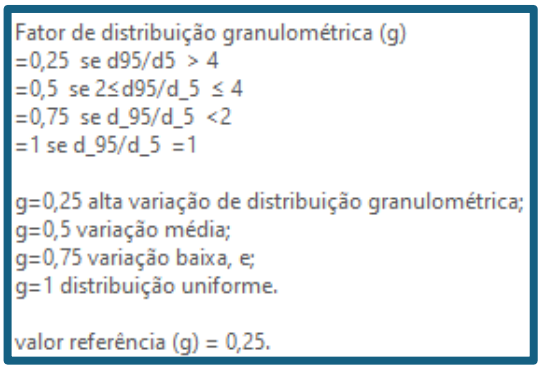

Figura 2 - Caixa de sugestão para o fator de distribuição granulométrica (g). Fonte: elaborado pelos autores (2026).

4.2 Comparação dos resultados – Minério de Ouro (Olivé, 2019)

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 19/06/2026 - **Accepted:** 01/07/2026
Vol: 13.15
DOI: 10.66104/64hdqf16
Pages: 1-36

A Figura 3 ilustra a página inicial do software com os inputs e outputs para o caso em análise. Para resolução deste problema foram utilizados os campos de 1 a 10. No campo 1 foi selecionado 4 faixas granulométricas e inserido o valor do fator de distribuição granulométrica ($g = 0{,}55$). No campo 2 foram informados os dados relativos às massas e teores. No campo 3 inseriram-se as malhas referentes às faixas em análise. No campo 4 são inseridos os dados para elaboração e simulação do protocolo de amostragem.

A Tabela 7 ilustra a comparação da diferença absoluta e relativa dos valores para regressão, determinados pela autora e obtidos pelo software considerando truncamento na segunda casa decimal. Nota-se pela tabela que os valores são praticamente iguais.

Tabela 7 – Comparação dos dados obtidos para determinação direta dos parâmetros k e α.

Parâmetro	Olivé (2019)	Software	Difer. |Δ|	Difer. (%)
dN_1 (cm)	0,42	0,42	0,00	0,00%
dN_2 (cm)	0,57	0,57	0,00	0,00%
dN_3 (cm)	1,03	1,03	0,00	0,00%
dN_4 (cm)	2,09	2,09	0,00	0,00%
EST. IHL_1	5,71	5,71	0,00	0,00%
EST. IHL_2	8,60	8,64	0,04	0,50%
EST. IHL_3	89,40	89,35	0,05	0,06%
EST. IHL_4	250,30	250,28	0,02	0,01%

Fonte: Elaborado pelos autores (2026).

No campo 9 são retornados os parâmetros $k = 49{,}36$, $\alpha = 2{,}51$ e coeficiente de determinação $R^2 = 95{,}85\%$, o MAE e MSE. A Tabela 8 ilustra a comparação dos parâmetros determinados pelo autor em relação aos obtidos pelo software. Nota-se que os valores determinados pelo autor são praticamente iguais aos valores retornados pelo software, com diferenças inferiores a 0,30%.

Tabela 8 – Comparação dos parâmetros k, α e R² (Olivé, 2019 vs. Software).

Parâmetro	Olivé (2019)	Software	Difer. |Δ|	Difer. (%)
k	49,49	49,36	0,13	0,26%

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 19/06/2026 - **Accepted:** 01/07/2026
Vol: 13.15
DOI: 10.66104/64hdqf16
Pages: 1-36

α	2,51	2,51	0,00	0,15%
R^2	95,74%	95,85%	0,0011	0,11%

Fonte: Elaborado pelos autores (2026).

O resultado de desvio padrão relativo total encontrado pelo software foi de 8,938%, ao passo que o determinado pela autora foi de 8,930%.

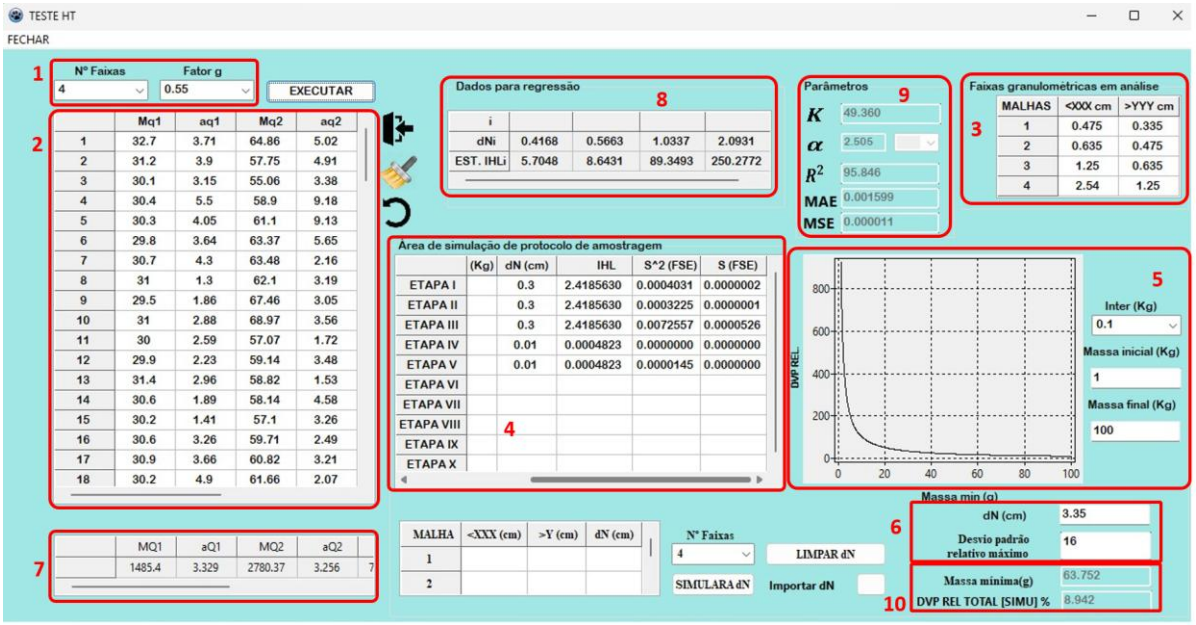

Figura 3 - Determinação dos parâmetros $\boldsymbol{k}$ e $\boldsymbol{\alpha}$ para minério de ouro. Teste HT. Janela do software AMINGY 1.02. Fonte: elaborado pelos autores (2026)

4.3 Comparação dos resultados – Minério de Willemita (Vargas et al., 2016)

A Figura 4 ilustra a página inicial do software com as entradas e saídas para determinação dos parâmetros k e α, assim como para simulação do protocolo de amostragem. No campo 1 selecionou-se o número de faixas em análise (4 faixas) e o fator de distribuição granulométrica (g = 0,55). No campo 2 foram inseridos os dados de massas e teores. No campo 3, as malhas em análise. No campo 4, os dados para elaboração de protocolo de amostragem. A Tabela 9 ilustra a comparação dos valores para regressão determinados pelos autores e obtidos pelo software. Nota-se pela Tabela 9 que os valores obtidos são iguais.

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 19/06/2026 - **Accepted:** 01/07/2026
Vol: 13.15
DOI: 10.66104/64hdqf16
Pages: 1-36

Tabela 9 – Comparação dos dados obtidos para determinação dos parâmetros k e α.

Parâmetro	Vargas et al. (2016)	Software	Difer. |Δ|	Difer. (%)
dN (cm)	0,42	0,42	0,00	0,00%
dN (cm)	0,57	0,57	0,00	0,00%
dN (cm)	1,05	1,05	0,00	0,00%
dN (cm)	2,10	2,10	0,00	0,00%
EST. IHL	0,48	0,48	0,00	0,00%
EST. IHL	1,31	1,31	0,00	0,00%
EST. IHL	13,19	13,19	0,00	0,00%
EST. IHL	30,41	30,41	0,00	0,00%

Fonte: Elaborado pelos autores (2026).

Com os dados de $\mathbf{d_N}$ e $\boldsymbol{IH_L}$, o software retornou os parâmetros $k = 6{,}155$ e $\alpha = 2{,}638$, MAE, MSE, e coeficiente de determinação $R^2 = 94{,}74\%$. A comparação é ilustrada na Tabela 10. Nota-se também que os valores determinados pelos autores são iguais aos retornados pelo software.

Tabela 10 – Comparação dos parâmetros k, α e R² (Vargas et al., 2016 vs. Software).

Parâmetro	Vargas et al. (2016)	Software	Difer. |Δ|	Difer. (%)
k	6,155	6,155	0,000	0,00%
α	2,638	2,638	0,000	0,00%
R²	94,74%	94,74%	0,000	0,00%

Fonte: Elaborado pelos autores (2026).

O resultado de desvio padrão relativo total do protocolo de amostragem não otimizado encontrado pelo software foi ≈ 13,40%, igual ao determinado pelos autores. Após a otimização, o software retornou o desvio padrão relativo total de 6,01%, equivalente ao determinado pelos autores.

A figura 5 ilustra a janela com as saídas para simulação do protocolo de amostragem, onde pode-se adicionar ou remover etapa do protocolo de amostragem, variar os tamanhos de cominuição e as massas. A combinação das etapas e dos parâmetros do protocolo, resultam na determinação automática do desvio padrão relativo.

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 19/06/2026 - **Accepted:** 01/07/2026
Vol: 13.15
DOI: 10.66104/64hdqf16
Pages: 1-36

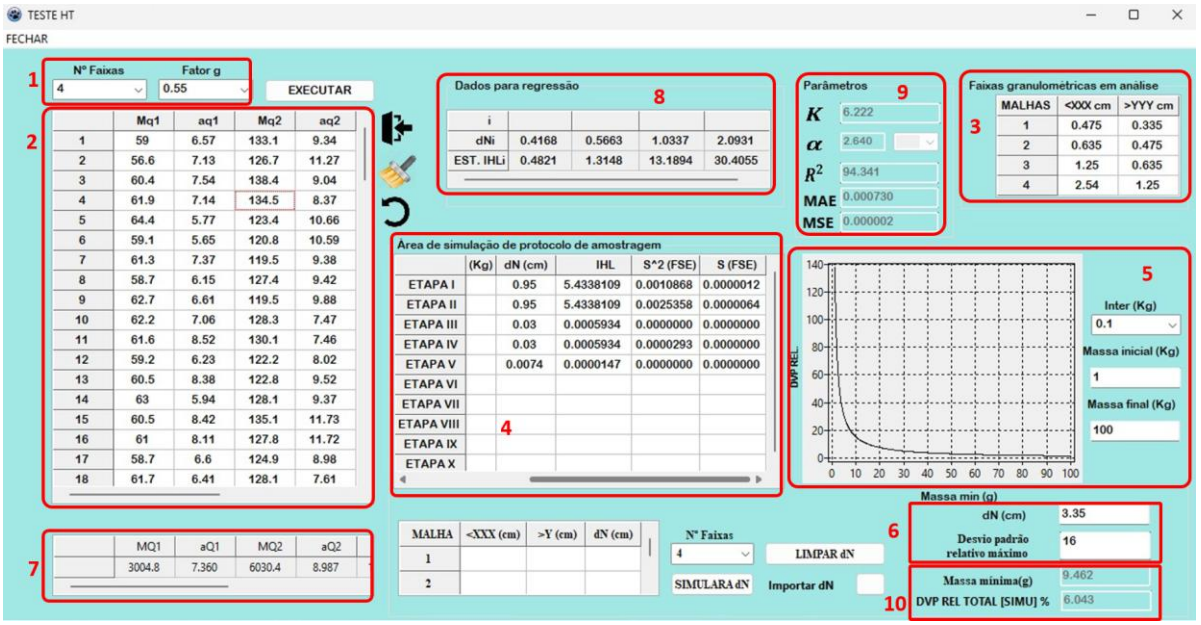

Figura 4 - Determinação dos parâmetros k e α para minério de willemita da usina de concentração de Vazante. Teste HT. Janela do software AMINGY 1.02. Fonte: Elaborado pelos autores (2026).

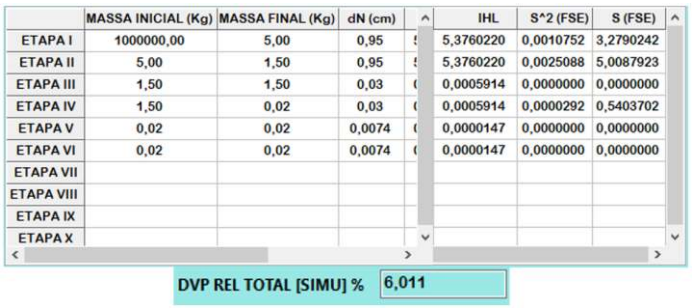

Figura 5 - Protocolo de amostragem otimizado. Saída do software AMINGY 1.02. Fonte: Elaborado pelos autores (2026).

4.4 Comparação com os resultados de Prado et al., (2024)

Os autores utilizam uma faixa granulométrica estreita com o diâmetro nominal de 1,2cm. Usou-se os valores de 1,511cm como malha máxima da faixa e 0,1819cm como malha mínima da faixa de forma a se chegar no mesmo diâmetro nominal (1,2cm). A figura 6, ilustra os resultados para o primeiro ensaio realizado, ao passo que a tabela 11 mostra os resultados comparativos entre os valores de IHL e k de Prado *et al*., (2024) e os retornados pelo software.

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 19/06/2026 - **Accepted:** 01/07/2026
Vol: 13.15
DOI: 10.66104/64hdqf16
Pages: 1-36

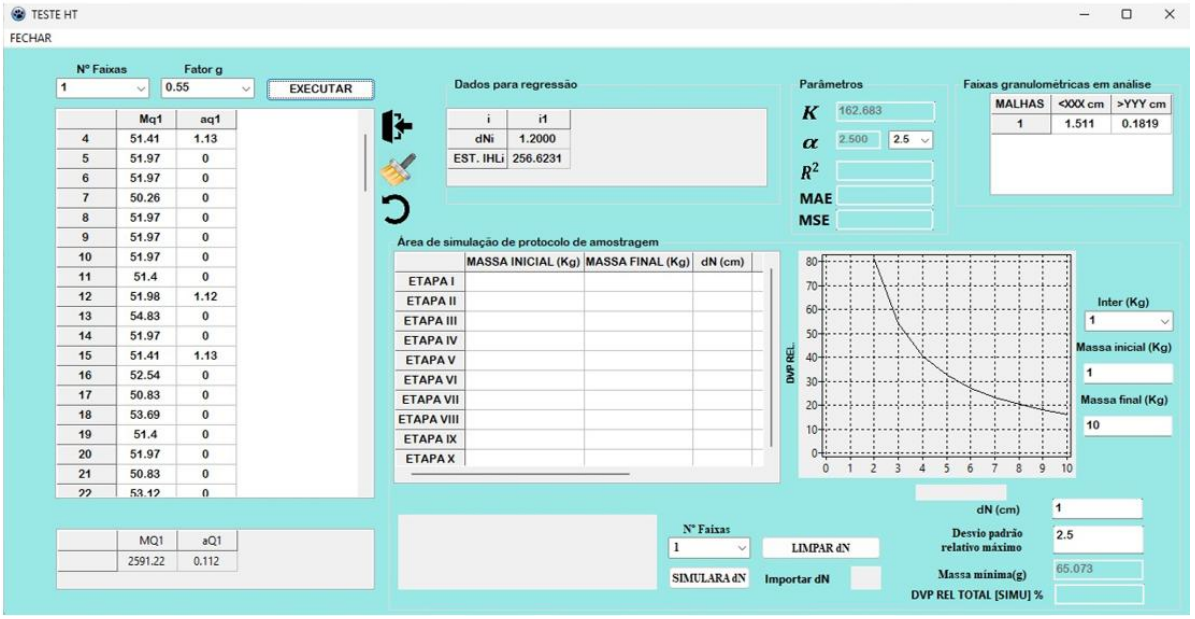

Figura 6 – Entradas e saídas do Software para o primeiro teste. Fonte: Elaborado pelos autores (2026).

Tabela 11 - Comparação entre os resultados de Prado *et al*. (2024) e os resultados obtidos pelo software.

Teste	IHL Prado *et al.*, (2024)	IHL Software	Desvio_% IHL	Fator K Prado *et al.*, (2024)	Fator K Software	Desvio_% Fator K
L—Blue (Au)	256,63	256,62	0,00	162,68	162,68	0,00
L—Blue (Au)	321,94	321,94	0,00	204,09	204,09	0,00
L—Blue (Au)	254,91	254,91	0,00	161,6	161,6	0,00
P—Red (Cu)	37,19	37,2	0,03	23,58	23,58	0,00
P—Red (Cu)	37,11	37,09	-0,05	23,52	23,51	-0,04
P—Red (Cu)	30,53	30,51	-0,07	19,35	19,34	-0,05
P—White (Pb)	2,23	2,23	0,00	1,42	1,42	0,00
P—White (Pb)	3,17	3,17	0,00	2,01	2,01	0,00
P—White (Pb)	2,98	2,98	0,00	1,89	1,89	0,00
P—Orange (Zn)	2,56	2,56	0,00	1,62	1,62	0,00
P—Orange (Zn)	2,36	2,36	0,00	1,49	1,5	0,67
P—Orange (Zn)	1,81	1,81	0,00	1,15	1,15	0,00

Fonte: Elaborado pelos autores (2026).

Os resultados demonstram alta aderência entre os valores de Prado *et al*., (2024) aos retornados pelo software. Os desvios observados para IHL foram

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 19/06/2026 - **Accepted:** 01/07/2026
Vol: 13.15
DOI: 10.66104/64hdqf16
Pages: 1-36

inferiores a 0,07%, enquanto os desvios para K foram inferiores a 0,67% em função de arredondamento.

De forma geral, os resultados obtidos são consistentes com a literatura, apontando para a generalidade do software, e mostrando a importância de ferramentas computacionais para suporte à tomada de decisão em operações mineiras. A abordagem de automatização de cálculos do teste HT reduz erros humanos e aumenta a reprodutibilidade, conforme demonstrado por Prado *et al*. (2024) com um testador automatizado de heterogeneidade intrínseca. Em termos operacionais, a capacidade de simular cenários distintos de massa e granulometria permite avaliar rapidamente o impacto das decisões de processo sobre o erro amostral, o que representa um avanço significativo frente aos métodos tradicionais.

Apesar dos resultados consistentes obtidos, algumas limitações devem ser consideradas. A precisão do software depende diretamente da qualidade dos dados experimentais provenientes do teste de heterogeneidade (HT), sendo sensível a erros analíticos e vieses na coleta dos fragmentos. Adicionalmente, a aplicação do modelo pressupõe condições próximas às hipóteses da teoria de Gy, o que pode ser enviesado em operações com elevada variabilidade mineralógica ou forte efeito de segregação. O software não implementa algoritmo formal de otimização com função objetivo e restrições. Dessa forma, recomenda-se a utilização do software como ferramenta de apoio, associada ao julgamento técnico do especialista.

5. Conclusão

O presente trabalho apresentou o desenvolvimento e a verificação numérica de um módulo computacional para determinação dos parâmetros k e α da equação de Pierre Gy pelo Teste de Heterogeneidade (HT), implementado em Pascal/Lazarus. O módulo integra, em uma única interface, as funções de entrada e validação de dados, cálculo do IH_L por faixa granulométrica, regressão linear em escala log-log, estimativa de k, α, R², MAE e MSE, simulação de protocolos de amostragem e estimativa da massa mínima representativa.

No primeiro exemplo exposto (teste de heterogeneidade HT de Olivé, 2019), as diferenças nos parâmetros k, α e R^2 foram de 0,26%, 0,15% e 0,11%,

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 19/06/2026 - **Accepted:** 01/07/2026
Vol: 13.15
DOI: 10.66104/64hdqf16
Pages: 1-36

respectivamente. No segundo exemplo (Vargas et al., 2016), o software retornou valores iguais aos determinados pelos autores. Aplicando ao trabalho de Prado *et al*., (2024) os desvios observados para IHL foram inferiores a 0,07%, enquanto os desvios para K foram inferiores a 0,67% em função de arredondamento.

A escolha da linguagem Pascal/Lazarus mostrou-se adequada para os objetivos do trabalho, permitindo a geração de executável nativo para Windows sem dependências externas e interface gráfica integrada e amigável. O software implementa tratamento de entradas inválidas com mensagens de erro descritivas, prevenindo a propagação de valores inconsistentes. O software representa uma contribuição relevante para a indústria mineral, especialmente no contexto da transformação digital e dos paradigmas da Indústria 4.0.

Como perspectivas futuras, recomenda-se a incorporação de módulos computacionais com outros métodos de amostragem como o SFA, e a implementação de algoritmos de otimização matemática de protocolos de amostragem, isto é, rotinas computacionais com função objetivo de forma a atender as restrições de erro amostral, granulometria e massas em cada etapa do protocolo de amostragem.

Referências

CHIEREGATI, A. C. A brief review of heterogeneity tests for estimating the variance of the fundamental sampling error. Sampling Science & Technology, 2024. DOI: 10.62178/sst.002.003.

CHIEREGATI, A. C. Comparison between K and alpha sampling constants with the Pierre Gy's factors for bauxite. REM – International Engineering Journal, 2023a. DOI: 10.1590/0370-44672022760033.

CHIEREGATI, A. C.; PITARD, F. F. Amostragem. In: LUZ, A. B.; FRANÇA, S. C. A.; BRAGA, P. F. Tratamento de minérios. Rio de Janeiro: CETEM, 2018. p. 27-64.

CHIEREGATI, A. C. et al. A comparison between the standard heterogeneity test and the simplified segregation free analysis for sampling protocol optimisation. Minerals, v. 13, n. 5, p. 680, 2023b. DOI: 10.3390/min13050680.

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 19/06/2026 - **Accepted:** 01/07/2026
Vol: 13.15
DOI: 10.66104/64hdqf16
Pages: 1-36

DUBÉ, J.-S.; ESBENSEN, K. H. Estimating the heterogeneity invariant using size-density classes: the case of contaminated soil and complex materials. TOS Forum, 2022. DOI: 10.1255/tosf.171.

FERNANDES, F. L. et al. Heterogeneity test for optimising nickel sampling protocols. REM – International Engineering Journal, 2020. DOI: 10.1590/0370-44672019730030.

GÓES, M. A. C.; LUZ, A. B.; POSSA, M. V. Amostragem. Rio de Janeiro: CETEM/MCT, 2010.

GY, P. M. Sampling of heterogeneous and dynamic material systems: theories of heterogeneity, sampling and homogenizing. Amsterdam: Elsevier, 1992.

GY, P. Sampling of discrete materials: a new introduction to the theory of sampling. I. Qualitative approach. Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems, v. 74, n. 1, p. 7-24, 2004.

HOLMES, R. J. Correct sampling and measurement: the foundation of accurate metallurgical accounting. Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems, v. 74, n. 1, p. 71-83, 2004.

LYMAN, G. Gy's discrete heterogeneity and the grouping and segregation variance. TOS Forum, 2022. DOI: 10.1255/tosf.169.

MAGALHÃES, M. F. *et al*. The use of DEM for optimising an industrial Vezin sampler operation. Minerals, v. 13, n. 11, p. 1460, 2023. DOI: 10.3390/min13111460.

MARCOTTE, D.; DUTAUT, R. Linking Gy's formula to QA/QC duplicates statistics. Mathematical Geosciences, 2021. DOI: 10.1007/S11004-020-09894-X.

MINKKINEN, P. O.; ESBENSEN, K. H. Sampling of particulate materials with significant spatial heterogeneity: theoretical modification of grouping and segregation factors involved with correct sampling errors: Fundamental Sampling Error and Grouping and Segregation Error. Analytica Chimica Acta, v. 1049, p. 47-64, 2019.

MINNITT, R. M. et al. Calibration of K and alpha (α) for bulk commodities. TOS Forum, 2022. DOI: 10.1255/tosf.131.

OLIVÉ, Amanda Nogueira. Teste de heterogeneidade como método de otimização do protocolo de amostragem em um projeto de concentração de minério de ouro. Trabalho de conclusão de curso. UFOP. 2019.

PITARD, F. F. Effects of residual variances on the estimation of the variance of the Fundamental Error. Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems, v. 74, n. 1, p. 149-164, 2004.

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 19/06/2026 - **Accepted:** 01/07/2026
Vol: 13.15
DOI: 10.66104/64hdqf16
Pages: 1-36

PITARD, F. F. Theory of sampling and sampling practice. 3. ed. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2019.

PRADO, G. C. et al. An automated approach to the heterogeneity test for sampling protocol optimization. Minerals, v. 14, n. 4, p. 434, 2024. DOI: 10.3390/min14040434.

SVENSMARK, B. The extended Gy's formula. TOS Forum, 2022. DOI: 10.1255/tosf.179.

VARGAS, F. G. R. G. C. et al. Otimização de protocolo de preparação de amostras em laboratório de análises físicas. In: 46. SEMINÁRIO DE REDUÇÃO DE MINÉRIO DE FERRO E MATÉRIAS-PRIMAS, 17. SIMPÓSIO BRASILEIRO DE MINÉRIO DE FERRO, 4. SIMPÓSIO BRASILEIRO DE AGLOMERAÇÃO DE MINÉRIO DE FERRO, 2016. Anais [...]. São Paulo: ABM, 2016. p. 147-153.

VILLANOVA, F. L. D. S. P. Estudo do erro fundamental de amostragem: uma comparação entre o teste de heterogeneidade e o teste da árvore no quartzo fumê na Mina Lamego (Sabará, MG). 2018. Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018.

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 19/06/2026 - **Accepted:** 01/07/2026
Vol: 13.15
DOI: 10.66104/64hdqf16
Pages: 1-36

APÊNDICE A

```
Algoritmo Teste_HT_Completo_Seguro

// ======================================
// 1. ENTRADAS GERAIS
// ======================================

leia N_FAIXAS
leia g
leia DVP_max

se (N_FAIXAS < 1) então
   escreva "ERRO: número de faixas inválido"
   pare
fimse

se (g <= 0) então
   escreva "ERRO: fator g inválido"
   pare
fimse

se (DVP_max <= 0) então
   escreva "ERRO: DVP máximo inválido"
   pare
fimse

// ======================================
// 2. LEITURA DOS DADOS Mq E aq
// ======================================

para k de 1 até N_FAIXAS faça

   soma_Mq ← 0
   soma_Mq_aq ← 0

   para i de 1 até N_SUBAMOSTRAS faça

      leia Mq[k,i]
      leia aq[k,i]

      se (Mq[k,i] é nulo) ou (aq[k,i] é nulo) então
         escreva "ERRO: valor ausente"
         pare
```

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 19/06/2026 - **Accepted:** 01/07/2026
Vol: 13.15
DOI: 10.66104/64hdqf16
Pages: 1-36

```
        fimse

        se (Mq[k,i] < 0) então
            escreva "ERRO: massa negativa"
            pare
        fimse

        soma_Mq ← soma_Mq + Mq[k,i]
        soma_Mq_aq ← soma_Mq_aq + Mq[k,i] × aq[k,i]

    fimpara

    se soma_Mq <= 0 então
        escreva "ERRO: soma de massas inválida"
        pare
    fimse

    aL[k] ← soma_Mq_aq / soma_Mq

    soma_var ← 0

    para i de 1 até N_SUBAMOSTRAS faça
        soma_var ← soma_var + ((aq[k,i] − aL[k])² × Mq[k,i]²)
    fimpara

    denominador ← aL[k]² × soma_Mq

    se denominador <= 0 então
        escreva "ERRO: divisão por zero no EST.IHL"
        pare
    fimse

    EST_IHL[k] ← g × soma_var / denominador

fimpara

// ====================================
// 3. CÁLCULO DE dN
// ====================================

para k de 1 até N_FAIXAS faça

    leia d_min[k]
    leia d_max[k]

    se (d_min[k] <= 0) ou (d_max[k] <= 0) então
```

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 19/06/2026 - **Accepted:** 01/07/2026
Vol: 13.15
DOI: 10.66104/64hdqf16
Pages: 1-36

```
        escreva "ERRO: limites granulométricos inválidos"
        pare
    fimse

    dN[k] ← ((d_min[k]³ + d_max[k]³)/2)^(1/3)

fimpara

// ======================================
// 4. DETERMINAÇÃO DE α E K
// ======================================

se N_FAIXAS < 3 então

    leia α

    se α <= 0 então
        escreva "ERRO: α inválido"
        pare
    fimse

    K ← EST_IHL[N_FAIXAS] / dN[N_FAIXAS]^α

    R² ← não aplicável

senão

    soma_x ← 0
    soma_y ← 0
    soma_xy ← 0
    soma_x2 ← 0

    para k de 1 até N_FAIXAS faça

        se (dN[k] <= 0) ou (EST_IHL[k] <= 0) então
            escreva "ERRO: logaritmo inválido"
            pare
        fimse

        x ← ln(dN[k])
        y ← ln(EST_IHL[k])

        soma_x ← soma_x + x
        soma_y ← soma_y + y
        soma_xy ← soma_xy + x × y
        soma_x2 ← soma_x2 + x²
```

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 19/06/2026 - **Accepted:** 01/07/2026
Vol: 13.15
DOI: 10.66104/64hdqf16
Pages: 1-36

```
    fimpara

    denom_reg ← N_FAIXAS × soma_x2 − soma_x²

    se |denom_reg| < 1 × 10⁻¹² então
       escreva "ERRO: regressão inválida"
       pare
    fimse

    α ← (N_FAIXAS × soma_xy − soma_x × soma_y) / denom_reg

    lnK ← (soma_y − α × soma_x) / N_FAIXAS

    K ← exp(lnK)

    calcular R²

fimse

// ======================================
// 5. PROTOCOLO DE AMOSTRAGEM
// ======================================

SOMA_MAE ← 0
SOMA_MSE ← 0
CONTADOR ← 0

para i de 1 até N_ETAPAS faça

    leia m1
    leia m2

    se (m1 <= 0) ou (m2 <= 0) então
       escreva "ERRO: massas inválidas"
       pare
    fimse

    IHL_i ← K × dN[i]^α

    erro_abs ← |(IHL_i/(m1 × 1000)) − (IHL_i/(m2 × 1000))|

    erro_quad ← erro_abs²

    SOMA_MAE ← SOMA_MAE + erro_abs
    SOMA_MSE ← SOMA_MSE + erro_quad
```

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 19/06/2026 - **Accepted:** 01/07/2026
Vol: 13.15
DOI: 10.66104/64hdqf16
Pages: 1-36

```
    CONTADOR ← CONTADOR + 1

fimpara

se CONTADOR > 0 então

    MAE ← SOMA_MAE / CONTADOR

    MSE ← SOMA_MSE / CONTADOR

senão

    MAE ← 0
    MSE ← 0

fimse

// ======================================
// 6. SIMULAÇÃO DE MASSA
// ======================================

leia MASSA_INICIAL
leia MASSA_PASSO
leia MASSA_FINAL
leia dN_sim

se MASSA_FINAL <= 0 então
    escreva "ERRO: massa final inválida"
    pare
fimse

se dN_sim <= 0 então
    escreva "ERRO: dN inválido"
    pare
fimse

massa_total ← 0

enquanto massa_total <= MASSA_FINAL faça

    massa_total ← massa_total + MASSA_INICIAL + MASSA_PASSO

    se massa_total <= 0 então
        escreva "ERRO: massa acumulada inválida"
        pare
```

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 19/06/2026 - **Accepted:** 01/07/2026
Vol: 13.15
DOI: 10.66104/64hdqf16
Pages: 1-36

```
    fimse

    variância ← (K × dN_sim^α) / massa_total

    escreva "Massa = ", massa_total, " Variância = ", variância

    MASSA_INICIAL ← 0

fimenquanto

// ====================================
// 7. MASSA MÍNIMA
// ====================================

massa_min ← (K × dN_sim^α) / DVP_max

se massa_min <= 0 então
    escreva "ERRO: massa mínima inválida"
    pare
fimse

// ====================================
// SAÍDA
// ====================================

escreva "α = ", α
escreva "K = ", K
escreva "R² = ", R²
escreva "MAE = ", MAE
escreva "MSE = ", MSE
escreva "Massa mínima = ", massa_min

escreva "Cálculo concluído com sucesso"

FimAlgoritmo
```