REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 13/10/2026 - **Accepted:** 10/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/a71q1j90
Pages: 1-34

DETERMINAÇÃO DAS FÓRMULAS FECHADAS DAS INTEGRAIS TRIGONOMÉTRICAS DE SENO, COSSENO E TANGENTE UTILIZANDO RECORRÊNCIA LINEAR

DERIVATION OF CLOSED-FORM FORMULAS FOR TRIGONOMETRIC INTEGRALS OF SINE, COSINE AND TANGENT USING LINEAR RECURRENCE

DERIVACIÓN DE FÓRMULAS EN FORMA CERRADA PARA INTEGRALES TRIGONOMÉTRICAS DE SENO, COSENO Y TANGENTE MEDIANTE RECURRENCIA LINEAL

Lauany Maria de Lima
Graduanda, UPE - Campus Garanhuns, Brasil
E-mail: lauany.lima@upe.br

Paulo Cavalcante do Nascimento Júnior
Doutor em Engenharia Mecânica, UPE - Campus Garanhuns, Brasil
E-mail: paulo.cavalcantejr@upe.br

Resumo

Este trabalho apresenta uma abordagem para a determinação de fórmulas fechadas, isto é, expressões explícitas, não recursivas, que podem envolver somatórios finitos, para integrais trigonométricas envolvendo potências de seno, cosseno e tangente, utilizando recorrências lineares de primeira ordem. O estudo tem como objetivo formular e resolver recorrências associadas a essas integrais, de modo a obter fórmulas explícitas a partir dos termos iniciais. Inicialmente, as integrais são associadas a recorrências lineares não homogêneas, sendo posteriormente organizadas em subsequências de acordo com a paridade dos expoentes. A resolução analítica dessas recorrências possibilita obter expressões fechadas para as integrais estudadas. As fórmulas obtidas são aplicadas a diferentes termos das sequências, ilustrando sua aplicabilidade, especialmente na determinação de integrais envolvendo potências elevadas. A abordagem desenvolvida evidencia que as recorrências lineares permitem estabelecer um procedimento sistemático para obter expressões explícitas das integrais de potências trigonométricas, articulando Sequências, Recorrências e Cálculo Integral.
Palavras-chave: Recorrência linear; Integrais trigonométricas; Fórmula fechada; Sequências numéricas.

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 13/10/2026 - **Accepted:** 10/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/a71q1j90
Pages: 1-34

Abstract

This paper presents an approach to determining closed-form expressions, that is, explicit, non-recursive expressions that may involve finite summations, for trigonometric integrals involving powers of sine, cosine, and tangent, using first-order linear recurrences. The study aims to formulate and solve recurrences associated with these integrals to derive explicit formulas based on initial terms. Initially, the integrals are linked to non-homogeneous linear recurrences and subsequently organized into subsequences according to the parity of the exponents. Analytically solving these recurrences enables the derivation of closed-form expressions for the integrals under study. The resulting formulas are applied to various terms of the sequences to illustrate their applicability, particularly for determining integrals involving high powers. The approach developed demonstrates that linear recurrences make it possible to establish a systematic procedure for obtaining explicit expressions for integrals of trigonometric powers, linking the concepts of Sequences, Recurrences, and Integral Calculus.
Keywords: Linear recurrence; Trigonometric integrals; Closed-form formula; Numerical sequences.

Resumen

Este trabajo presenta un enfoque para la determinación de fórmulas cerradas, es decir, expresiones explícitas y no recursivas que pueden involucrar sumatorias finitas, para integrales trigonométricas que contienen potencias de seno, coseno y tangente, mediante el uso de recurrencias lineales de primer orden. El estudio busca formular y resolver recurrencias asociadas a estas integrales, con el fin de obtener fórmulas explícitas a partir de los términos iniciales. Inicialmente, las integrales se asocian con recurrencias lineales no homogéneas y, posteriormente, se organizan en subsucesiones según la paridad de los exponentes. La solución analítica de estas recurrencias permite obtener expresiones en forma cerrada para las integrales estudiadas. Las fórmulas obtenidas se aplican a diferentes términos de las sucesiones, lo que permite ilustrar su aplicabilidad, especialmente en la determinación de integrales que involucran altas potencias. El enfoque desarrollado demuestra que las recurrencias lineales permiten establecer un procedimiento sistemático para obtener expresiones explícitas de las integrales de potencias trigonométricas, articulando los conceptos de Sucesiones, Recurrencias y Cálculo Integral.
Palabras clave: Recurrencia lineal; Integrales trigonométricas; Fórmula en forma cerrada; Sucesiones numéricas.

1. Introdução

O estudo das sequências numéricas e suas propriedades fundamentais constitui um dos pilares da matemática, permitindo a modelagem de fenômenos discretos e a simplificação de processos iterativos. No Cálculo Diferencial e Integral, um dos desafios recorrentes é a resolução de integrais trigonométricas de potências elevadas. Tradicionalmente, esse problema é tratado por meio de fórmulas de redução, fundamentadas em identidades trigonométricas e integração por partes. Obras como as de Leithold (1994) e Flemming e Gonçalves (2006) apresentam metodologias consolidadas, porém baseadas em relações recursivas que dependem do cálculo dos termos anteriores.

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 13/10/2026 - **Accepted:** 10/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/a71q1j90
Pages: 1-34

Nesse contexto, a teoria das sequências assume papel fundamental. Segundo Pereira (2014), uma relação de recorrência permite determinar um termo da sequência a partir de seus predecessores. Entre seus principais exemplos, destacam-se as Progressões Aritméticas (PA), as Progressões Geométricas (PG) e a sequência de Fibonacci, que evidenciam sua importância na Matemática.

Embora as fórmulas de redução forneçam um procedimento consolidado para o cálculo dessas integrais, sua aplicação sucessiva pode tornar a resolução extensa e suscetível a erros algébricos. Surge, portanto, a necessidade de buscar fórmulas fechadas para as integrais trigonométricas, isto é, expressões explícitas, não recursivas, que podem envolver somatórios finitos e que permitam determinar diretamente a integral em função do expoente n e da variável x, sem a necessidade de recorrer repetidamente às fórmulas de redução. Essa abordagem dispensa o cálculo recursivo de todas as integrais anteriores e torna o procedimento mais sistemático, embora as expressões obtidas envolvam somatórios e coeficientes fatoriais.

No Ensino Superior, especialmente nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, essa perspectiva tem potencial didático, ao permitir explorar conexões entre Sequências, Matemática Discreta e Cálculo (paridade, condições iniciais, passagem de recorrência a expressão explícita). Assim, este trabalho justifica-se pela necessidade de sistematizar esse tipo de cálculo, substituindo um processo iterativo por expressões explícitas de aplicação direta. Conforme Lima et al. (2004), a identificação de padrões e sequências é essencial para o desenvolvimento do raciocínio abstrato, aspecto que a generalização aqui apresentada permite explorar.

Diante desse cenário, o presente artigo tem como objetivo apresentar uma dedução, por recorrências lineares de primeira ordem não homogêneas, de expressões explícitas (não recursivas) para as integrais das potências de seno, cosseno e tangente. As fórmulas de redução de Flemming e Gonçalves (2006) são resultados conhecidos e constituem o ponto de partida. A contribuição do trabalho consiste em: reescrevê-las como recorrências lineares e resolvê-las

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 13/10/2026 - **Accepted:** 10/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/a71q1j90
Pages: 1-34

pelo método de Lima et al. (2004), separadas por paridade; obter seis expressões, quatro delas com coeficientes fatoriais que evidenciam a estrutura combinatória; verificá-las por casos particulares, indução e derivação; e ilustrar seu uso em aplicações. Expressões equivalentes para essas primitivas podem ser obtidas por outros caminhos (por exemplo, pela substituição $u = cos(x)$ e expansão binomial, nas potências ímpares de seno, e $u = sen(x)$, nas de cosseno). Não se pretende apresentá-las como novas, e sim mostrar como esta classe de resultados decorre da teoria de recorrências lineares de primeira ordem.

2. Recorrência

As sequências são definidas recursivamente, ou por recorrência, ou seja, através de uma regra capaz de calcular qualquer termo em função de um ou mais termos anteriores. Por exemplo, a sequência dos números múltiplos de 2 que pode ser definida por $x_{n+1} = x_n + 2$, com $x_1 = 2$ e $n \geq 1$. Outro exemplo é a sequência de Fibonacci, definida por $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, com $n \geq 0$ e $F_0 = 0,\ F_1 = 1$.

Uma sequência $\{a_n\}$ é solução de uma relação de recorrência, quando satisfaz a equação para todos os valores permitidos de n. A recorrência é definida pela equação de formação e pelas condições iniciais, podendo ser classificada quanto à ordem, à linearidade e à presença de termo independente.

A recorrência de primeira ordem é aquela em que cada termo é expresso em função do seu antecessor imediato, isto é, depende apenas de x_n. Já a recorrência de segunda ordem é aquela em que cada termo depende dos dois termos anteriores, como ocorre na sequência de Fibonacci, em que cada termo é obtido a partir da soma dos dois anteriores.

Uma recorrência é linear, quando os termos da sequência aparecem apenas multiplicados por funções de n, sem produtos entre si nem potências; caso contrário, é dita não linear. Por exemplo, $x_{n+1} = 4x_n$ é linear, enquanto $x_{n+1} = 1 + x_n^2$ é não linear. Entre as recorrências lineares, uma subcategoria importante é a das recorrências com coeficientes constantes, nas quais os multiplicadores dos termos da sequência são números reais fixos. Temos, como exemplo, a

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 13/10/2026 - **Accepted:** 10/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/a71q1j90
Pages: 1-34

relação de recorrência $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$, em que os coeficientes são constantes.

As recorrências homogêneas são aquelas que não possuem termo independente, ou seja, todos os termos dependem apenas da própria sequência, como por exemplo, $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n$. Já as recorrências não homogêneas possuem termo independente, como em $x_{n+1} = 7x_n + 2$.

Trataremos, no presente trabalho, especialmente das recorrências lineares de primeira ordem, isto é, aquelas em que x_{n+1} depende de x_n com expoente 1. De modo geral, pode ser escrita na forma:

$$x_{n+1} = g(n)x_n + h(n)$$

Em que $g(n)$ e $h(n)$ são funções de n. Temos como exemplos: $x_{n+1} = 4x_n$ e $x_{n+1} = nx_n + 2n$. Em contraste, uma recorrência como $x_{n+1} = 1 + x_n^2$, é não linear.

As recorrências lineares podem ser homogêneas, isto é, $h(n) = 0$, como em $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n$. Já as não homogêneas possuem termo independente, como em $x_{n+1} = nx_n - 2n^2$. Um conceito fundamental estabelece que a solução geral de uma recorrência não homogênea é a soma da solução geral da sua parte homogênea associada com uma solução particular da equação completa.

Neste trabalho utilizaremos um teorema de Lima et al. (2004), que mostra que qualquer recorrência linear não homogênea de primeira ordem pode ser transformada em uma recorrência mais simples da forma $y_{n+1} = y_n + f(n)$, facilitando sua resolução.

Teorema 1: Se a_n é uma solução não-nula de $x_{n+1} = g(n)x_n$, então a substituição $x_n = a_n y_n$ transforma a recorrência $x_{n+1} = g(n)x_n + h(n)$ em

$$y_{n+1} = y_n + h(n)[g(n) \cdot a_n]^{-1}.$$

Assim, se x_n é solução não nula da recorrência homogênea associada $x_{n+1} = p(n)x_n$ então $a_n = x_n y_n$ transforma

$$a_{n+1} = p(n)a_n + q(n) \quad (1)$$

em

$$y_{n+1} = y_n + \frac{q(n)}{p(n)x_n}.$$

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 13/10/2026 - **Accepted:** 10/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/a71q1j90
Pages: 1-34

Nesta aplicação, x_n desempenha o papel da solução a_n do Teorema 1. Podemos desenvolver a nova recorrência expandindo sucessivamente para $n = 1, 2, 3$, e por indução generalizamos a expressão para $y_{n+1} = y_1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{q(k)}{p(k)x_k}$. Multiplicando ambos os lados por x_{n+1}, e como $a_{n+1} = x_{n+1}(y_{n+1})$, temos $a_{n+1} = x_{n+1}\left(y_1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{q(k)}{p(k)x_k}\right)$. Usando a condição inicial $a_1 = x_1 y_1$ e escolhendo $a_1 = x_1$, obtemos que $y_1 = \frac{a_1}{x_1} = 1$. Logo, a solução da recorrência com condição inicial $a_1 = x_1$ é dada por:

$$a_{n+1} = x_{n+1}\left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{q(k)}{p(k)x_k}\right) \quad (2)$$

Esse resultado mostra que a resolução de uma recorrência linear não homogênea de primeira ordem pode ser reduzida à solução da recorrência homogênea associada e ao cálculo de uma soma finita. Dessa forma, obtém-se uma expressão explícita (ou fórmula fechada) para a sequência, permitindo calcular diretamente qualquer termo sem a necessidade de determinar todos os anteriores, aspecto de grande importância em aplicações matemáticas e na análise de algoritmos.

As deduções a seguir supõem que a solução homogênea de índice 1 não se anula (por exemplo, em $x = 0$ para b_1 do seno), pois ela aparece no denominador da Eq. (2). Como $x_k = c_k x_1$ com $c_k \neq 0$ e $p(k) \neq 0$, essa é a única condição necessária. A validade das fórmulas finais em todo o seu domínio é demonstrada na Seção 4, que não usa essa divisão.

3. Solução Analítica

A partir das relações de recorrência estabelecidas para as integrais trigonométricas, é possível determinar expressões explícitas, ou fórmulas fechadas, eliminando a dependência recursiva entre seus termos. Nesta seção, essas expressões são obtidas por meio da resolução das recorrências associadas, utilizando transformações algébricas e técnicas aplicadas a recorrências lineares. Essa abordagem permite acesso direto à primitiva e evidencia padrões estruturais presentes nas expressões obtidas. Assim, a passagem da forma recursiva para a forma fechada consolida um método que permite determinar diretamente as integrais em função do expoente da potência.

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 13/10/2026 - **Accepted:** 10/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/a71q1j90
Pages: 1-34

Neste desenvolvimento, a_n, b_n, c_n designam primitivas particulares, e a constante C é acrescentada apenas nas fórmulas finais. A solução da recorrência homogênea associada será denotada por u_k (no lugar de x_k da Eq. (2)), para não confundi-la com a variável de integração x. Por convenção, adota-se $0! = 1$ e somatório vazio igual a zero. As recorrências (4), (11) e análogas valem para $n \geq 2$.

Tabela 1 – Primitivas particulares (casos-base)

FUNÇÃO	VALORES BASE
$\int sen^2(x)\,dx$	$\frac{x}{2} - \frac{sen(x)\cos(x)}{2}$
$\int sen(x)dx$	$-\cos(x)$
$\int \cos^2(x)\,dx$	$\frac{x}{2} + \frac{sen(x)\cos(x)}{2}$
$\int cos(x)dx$	$sen(x)$
$\int \tan^2(x)\,dx$	$\tan(x) - x$
$\int tan(x)\,dx$	$-\ln\lvert cos(x)\rvert$

Fonte: Elaboração própria

3.1. Determinação da Fórmula do Seno

Inicialmente, consideramos a sequência formada pelas integrais de potências da função seno. A partir dessa sequência, buscamos estabelecer uma relação de recorrência que permita determinar seus termos de maneira sistemática. Assim, a sequência $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n)$ pode ser representada por $(a_n) = (\int sen(x)dx\,, \int sen^2(x)dx\,, \int sen^3(x)dx\,, \dots, \int sen^{n-1}(x)dx\,, \int sen^n(x)dx)$.

Para determinar a fórmula fechada associada às integrais de potências da função seno, partimos da relação apresentada por Flemming e Gonçalves (2006), dada por:

$$\int sen^n(x)dx = -\frac{1}{n}sen^{n-1}(x)\cos(x) + \frac{n-1}{n}\int sen^{n-2}(x)dx \qquad (3)$$

Essa relação permite reduzir o cálculo da integral de ordem n para uma integral de $n-2$, caracterizando assim uma relação de recorrência. Para utilizar os métodos de resolução de recorrências lineares basta considerar:

$$a_n = \int sen^n(x)dx$$

E, consequentemente,

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 13/10/2026 - **Accepted:** 10/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/a71q1j90
Pages: 1-34

$$a_{n-2} = \int sen^{n-2}(x)dx$$

Substituindo essas expressões na relação original, obtemos a seguinte recorrência:

$$a_n = \frac{n-1}{n} a_{n-2} - \frac{\cos(x) sen^{n-1}(x)}{n}$$

Note que essa relação conecta apenas termos de mesma paridade a_n e a_{n-2}. Assim, ao separar a sequência em índices pares e ímpares, cada subsequência passa a satisfazer uma recorrência linear de primeira ordem.

Para compreender o comportamento da recorrência, consideremos os casos $n = 4$ e $n = 5$. Para $n = 4$, a aplicação sucessiva da redução conduz de $\int sen^4(x)dx$ até $\int sen^0(x)dx = \int 1dx = x$, o que gera um termo linear em x. Já para $n = 5$, a redução conduz à integral $\int sen(x)dx = -\cos(x)$, sem produzir esse termo. Portanto, o comportamento da solução depende da paridade do expoente, justificando a separação da sequência em duas subsequências: pares e ímpares, cada uma com sua respectiva fórmula fechada.

3.1.1. Subsequência Par

Para a subsequência par, utilizaremos $b_n = a_{2n}$, onde $n \geq 1$. Logo, a sequência será:

$$(b_n) = (a_{2n}) =$$

$$(\int sen^2(x)\,dx, \int sen^4(x)\,dx, \int sen^6(x)\,dx, \ldots, \int sen^{2n-2}(x)\,dx, \int sen^{2n}(x)\,dx)$$

O primeiro termo da sequência é dado por:

$$b_1 = \int sen^2(x)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{sen(x)\cos(x)}{2}$$

A partir da fórmula geral Eq.(3) de redução previamente apresentada, temos:

$$b_n = \int sen^{2n}(x)dx = -\frac{1}{2n} sen^{2n-1}(x)\cos(x) + \frac{2n-1}{2n} \int sen^{2n-2}(x)dx$$

E, consequentemente,

$$b_{n-1} = \int sen^{2n-2}(x)dx$$

Logo, podemos escrever a seguinte relação de recorrência:

$$b_n = \frac{2n-1}{2n} b_{n-1} - \frac{\cos(x) sen^{2n-1}(x)}{2n} \quad (4)$$

Essa expressão caracteriza uma recorrência linear de primeira ordem não homogênea. Para a determinação da fórmula fechada, realizamos a mudança de variável $n = m + 1$ substituindo na Eq.(4):

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 13/10/2026 - **Accepted:** 10/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/a71q1j90
Pages: 1-34

$$b_{\mathrm{m+1}} = \frac{2m+1}{2m+2} b_m - \frac{\cos(x) sen^{2m+1}(x)}{2m+2}$$

Comparando com a forma padrão da Eq.(1), identificamos:

$$p(m) = \frac{2m+1}{2m+2} \tag{5}$$

E

$$q(m) = -\frac{\cos(x) sen^{2m+1}(x)}{2m+2} \tag{6}$$

Para resolver a recorrência não homogênea, analisamos inicialmente a recorrência homogênea associada, tomando $q(m) = 0$ e u_m a solução com $u_1 = b_1$:

$$u_{m+1} = \frac{2\mathrm{m}+1}{2\mathrm{m}+2} u_m \tag{7}$$

A seguir, expandimos iterativamente os primeiros termos. Para $m = 1$, temos $u_2 = \frac{3}{4} u_1$. Para $m = 2$, $u_3 = \frac{5}{6} u_2 = \frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 4} u_1$. E para $m = 3$,

$$u_4 = \frac{7}{8} u_3 = \frac{7 \cdot 5 \cdot 3}{8 \cdot 6 \cdot 4} u_1 \tag{8}$$

Observa-se que os termos seguem um padrão envolvendo produtos de números ímpares no numerador e pares no denominador. Para generalizar a Eq.(8), utilizaremos fatoriais. Note que, para o denominador, podemos escrever $8 \cdot 6 \cdot 4 = 2^3 \cdot 4!$. Além disso, podemos decompor o fatorial de 7 da seguinte forma, $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = (7 \cdot 5 \cdot 3) 6 \cdot 4 \cdot 2$. Dessa forma, isolando o produto dos termos ímpares, obtemos $7 \cdot 5 \cdot 3 = \frac{7!}{6 \cdot 4 \cdot 2} = \frac{7!}{2^3 (3!)}$. Substituindo essa expressão na Eq.(8), podemos reescrever:

$$u_4 = \frac{\frac{7!}{2^3(3!)}}{2^3(4!)} u_1 = \frac{7!}{[2^3(3!)][2^3(4!)]} u_1 = \frac{(6+1)!}{2^6(3!)(4!)} u_1 = \frac{(2 \cdot 3+1)!}{2^{2 \cdot 3}(3!)(3+1)!} u_1$$

Generalizando esse padrão, obtemos:

$$u_{m+1} = \frac{(2m+1)!}{2^{2m}(m!)(m+1)!} u_1 \tag{9}$$

A partir daí, obtemos também:

$$u_k = \frac{(2k-1)!}{2^{2k-2}(k-1)!(k!)} u_1 \tag{10}$$

Com essas expressões, substituímos nas Eq.(5), Eq.(6), Eq.(9) e Eq.(10) na fórmula geral da Eq.(2). Após essa substituição, obtemos uma expressão envolvendo um somatório com coeficientes fatoriais e potências da função seno:

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 13/10/2026 - **Accepted:** 10/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/a71q1j90
Pages: 1-34

$$b_{m+1} = \frac{(2m+1)!}{2^{2m}(m!)(m+1)!}u_1\left(1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{-\frac{\cos(x)sen^{2k+1}(x)}{2k+2}}{\frac{2k+1}{2k+2}\frac{(2k-1)!}{2^{2k-2}(k-1)!(k!)}u_1}\right)$$

Ao organizar os termos e realizar simplificações algébricas, chegamos a:

$$b_{m+1} = \frac{(2m+1)!}{2^{2m}(m!)(m+1)!}\left[u_1 - \sum_{k=1}^{m} \frac{2^{2k-2}(k-1)!(k!)\cos(x)sen^{2k+1}(x)}{(2k+1)(2k-1)!}\right]$$

Utilizando a identidade $(2k+1)\cdot(2k)\cdot(2k-1)! = (2k+1)!$ podemos reescrever $(2k+1)\cdot(2k-1)! = \frac{(2k+1)!}{2k}$. Substituindo na expressão anterior e reorganizando os termos, obtemos:

$$b_{m+1} = \frac{(2m+1)!}{2^{2m}(m!)(m+1)!}\left[u_1 - \sum_{k=1}^{m} \frac{2^{2k-2}(k-1)!(k!)\cos(x)sen^{2k+1}(x)}{\frac{(2k+1)!}{2k}}\right]$$

Observa-se que o denominador da fração no interior do somatório pode ser simplificado ao se multiplicar pelo inverso da fração $\frac{(2k+1)!}{2k}$. Assim, a expressão pode ser reescrita como:

$$b_{m+1} = \frac{(2m+1)!}{2^{2m}(m!)(m+1)!}\left[u_1 - \sum_{k=1}^{m} \frac{2^{2k-2}(k-1)!(k!)\,(2\mathrm{k})\cos(x)sen^{2k+1}(x)}{(2k+1)!}\right]$$

Agora, procedemos com a simplificação dos termos fatoriais e das potências de 2. Note ainda, que $(k-1)!\cdot k = k!$ implica em $(k-1)!\cdot(k!)\cdot k = (k!)^2$. Além disso, ao considerar as potências de 2, temos $2^{2k-2}\cdot 2 = 2^{2k-1}$. Essas observações permitem simplificar significativamente o termo geral do somatório. Logo, obtemos:

$$b_{m+1} = \frac{(2m+1)!}{2^{2m}(m!)(m+1)!}\left[u_1 - \sum_{k=1}^{m} \frac{2^{2k-1}(k!)^2\cos(x)sen^{2k+1}(x)}{(2k+1)!}\right]$$

Podemos colocar o fator $\cos(x)$ em evidência no somatório, destacando a estrutura comum dos termos:

$$b_{m+1} = \frac{(2m+1)!}{2^{2m}(m!)(m+1)!}\left[u_1 - \cos(x)\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{2^{2k-1}(k!)^2}{(2k+1)!}\cdot sen^{2k+1}(x)\right)\right]$$

Substituindo $u_1 = b_1 = \int sen^2(x)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{sen(x)\cos(x)}{2}$ e retornando à variável original n, com $m = n-1$, obtemos:

$$b_n = \frac{(2n-1)!}{2^{2n-2}(n-1)!(n!)}\left[\left(\frac{x}{2} - \frac{sen(x)\cos(x)}{2}\right) - \cos(x)\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2^{2k-1}(k!)^2}{(2k+1)!}\cdot sen^{2k+1}(x)\right)\right]$$

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 13/10/2026 - **Accepted:** 10/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/a71q1j90
Pages: 1-34

É possível observar que o termo $-\frac{sen(x)\cos(x)}{2}$ corresponde exatamente ao termo do somatório quando $k=0$. Dessa forma, podemos incorporá-lo ao somatório, reescrevendo a expressão de forma mais compacta:

$$b_n = \frac{(2n-1)!}{2^{2n-2}(n-1)!(n!)}\left[\frac{x}{2} - \cos(x)\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{2^{2k-1}(k!)^2}{(2k+1)!}\cdot sen^{2k+1}(x)\right)\right]$$

Voltando à forma integral, temos:

$$\int sen^{2n}(x)dx = \frac{(2n-1)!}{2^{2n-2}(n-1)!(n!)}\left[\frac{x}{2} - \cos(x)\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{2^{2k-1}(k!)^2}{(2k+1)!}\cdot sen^{2k+1}(x)\right)\right] + C$$

■

3.1.2. Subsequência Ímpar

Para a subsequência ímpar, utilizaremos $c_n = a_{2n-1}$, onde $n \geq 1$. Logo, a sequência será:

$$(c_n) = (a_{2n-1}) =$$

$$\left(\int sen(x)dx\,, \int sen^3(x)\,dx, \int sen^5(x)dx\,, \ldots, \int sen^{2n-3}(x)dx, \int sen^{2n-1}(x)dx\right)$$

O primeiro termo da sequência é dado por:

$$c_1 = \int sen(x)dx = -\cos(x).$$

Esse termo será utilizado como condição inicial no processo de resolução da recorrência. A partir da fórmula geral de redução, temos:

$$c_n = \int sen^{2n-1}(x)dx = \frac{-1}{2n-1}sen^{(2n-1)-1}(x)\cos(x) + \frac{(2n-1)-1}{2n-1}\int sen^{(2n-1)-2}(x)dx$$

E, consequentemente,

$$c_{n-1} = \int sen^{(2n-1)-2}(x)dx$$

Logo, podemos escrever a seguinte relação de recorrência:

$$c_n = \frac{2n-2}{2n-1}c_{n-1} - \frac{\cos(x)sen^{2n-2}(x)}{2n-1} \qquad (11)$$

Trata-se de uma recorrência linear de primeira ordem não homogênea. Para determinar a fórmula fechada, realizamos a mudança de variável $n = m+1$ substituindo na Eq.(11):

$$c_{\mathrm{m}+1} = \frac{2m}{2m+1}c_m - \frac{\cos(x)sen^{2m}(x)}{2m+1}$$

Comparando com a forma padrão da Eq.(1), identificamos:

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 13/10/2026 - **Accepted:** 10/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/a71q1j90
Pages: 1-34

$$p(m) = \frac{2m}{2m+1} \tag{12}$$

E

$$q(m) = -\frac{\cos(x)sen^{2m}(x)}{2m+1} \tag{13}$$

Para resolver a recorrência não homogênea, analisamos inicialmente a recorrência homogênea associada, tomando $q(m) = 0$ e u_m a solução com $u_1 = c_1$:

$$u_{m+1} = \frac{2\mathrm{m}}{2\mathrm{m}+1} u_m \tag{14}$$

Vamos expandir então. Para $m = 1$, temos $u_2 = \frac{2}{3}u_1$. Para $m = 2$, $u_3 = \frac{4}{5}u_2 = \frac{4\cdot 2}{5\cdot 3}u_1$. E, para $m = 3$, temos:

$$u_4 = \frac{6}{7}u_3 = \frac{6\cdot 4\cdot 2}{7\cdot 5\cdot 3}u_1 \tag{15}$$

Note que de forma a simplificar e generalizar a Eq.(15) podemos escrever os produtos em termos fatoriais, $6 \cdot 4 \cdot 2 = 2^3(3 \cdot 2 \cdot 1) = 2^3(3!)$. Além disso, podemos decompor o fatorial de 7 da seguinte forma: $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = (7 \cdot 5 \cdot 3)6 \cdot 4 \cdot 2$. Dessa forma, isolando o produto dos termos ímpares, obtemos $7 \cdot 5 \cdot 3 = \frac{7!}{6\cdot 4\cdot 2} = \frac{7!}{2^3(3!)}$. Substituindo na Eq.(15), segue que:

$$u_4 = \frac{2^3(3!)}{\frac{7!}{2^3(3!)}}u_1 = \frac{[2^3(3!)][2^3(3!)]}{7!}u_1 = \frac{2^6(3!)^2}{(6+1)!}u_1 = \frac{2^{2\cdot 3}(3!)^2}{(2\cdot 3+1)!}u_1$$

Generalizando, obtemos:

$$u_{m+1} = \frac{2^{2m}(m!)^2}{(2m+1)!}u_1 \tag{16}$$

A partir daí, temos:

$$u_k = \frac{2^{2k-2}[(k-1)!]^2}{(2k-1)!}u_1 \tag{17}$$

Substituindo as Eq.(12), Eq.(13), Eq.(16) e Eq.(17) na expressão geral da Eq.(2), obtemos:

$$c_{m+1} = \frac{2^{2m}(m!)^2}{(2m+1)!}u_1\left(1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{-\frac{\cos(x)sen^{2k}(x)}{2k+1}}{\frac{2k}{2k+1}\cdot\frac{2^{2k-2}[(k-1)!]^2}{(2k-1)!}u_1}\right)$$

Organizando a equação:

$$c_{m+1} = \frac{2^{2m}(m!)^2}{(2m+1)!}u_1\left[1 + \sum_{k=1}^{m} -\frac{(2k-1)!\cos(x)sen^{2k}(x)}{(2k)2^{2k-2}[(k-1)!]^2 u_1}\right]$$

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 13/10/2026 - **Accepted:** 10/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/a71q1j90
Pages: 1-34

Utilizando a identidade $(2k)\cdot(2k-1)!=(2k)!$ e isolando um dos fatoriais, segue que $(2k-1)!=\frac{(2k)!}{2k}$. De forma análoga, temos $(k-1)!=\frac{k!}{k}$, que elevando ambos os lados ao quadrado, implica em $[(k-1)!]^2=\frac{(k!)^2}{k^2}$. Substituindo essas identidades na expressão obtida anteriormente, temos:

$$c_{m+1}=\frac{2^{2m}(m!)^2}{(2m+1)!}u_1\left[1-\sum_{k=1}^{m}\frac{\frac{(2k)!}{2k}\cos(x)sen^{2k}(x)}{(2k)2^{2k-2}\frac{(k!)^2}{k^2}u_1}\right]$$

Neste ponto, observa-se que os termos envolvendo $2k$ e k^2 permitem simplificações diretas. Após realizar essas simplificações com cuidado, obtemos:

$$c_{m+1}=\frac{2^{2m}(m!)^2}{(2m+1)!}u_1\left[1-\sum_{k=1}^{m}\frac{(2k)!\cos(x)sen^{2k}(x)}{2^{2k}(k!)^2u_1}\right]$$

Agora, substituindo $u_1=\mathrm{c}_1=\int \mathrm{sen(x)\,dx}=-\cos(\mathrm{x})$ e retornando à variável original n, com $\mathrm{m}=\mathrm{n}-1$, obtemos:

$$c_n=\frac{2^{2n-2}[(n-1)!]^2}{(2n-1)!}\left[(-\cos(x))-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(2k)!\cos(x)sen^{2k}(x)}{2^{2k}(k!)^2}\right]$$

Observa-se que o fator $\cos(x)$ pode ser colocado em evidência no somatório, resultando em:

$$c_n=\frac{2^{2n-2}[(n-1)!]^2}{(2n-1)!}\left[(-\cos(x))-\cos(x)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(2k)!sen^{2k}(x)}{2^{2k}(k!)^2}\right]$$

É possível observar que o termo $-\cos(x)$ corresponde exatamente ao termo do somatório quando $k=0$, então vamos incorporá-lo reescrevendo a expressão de forma mais compacta:

$$c_n=\frac{2^{2n-2}[(n-1)!]^2}{(2n-1)!}\left[-\cos(x)\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\cdot sen^{2k}(x)\right)\right]$$

Ou, equivalentemente,

$$c_n=-\cos(x)\cdot\frac{2^{2n-2}[(n-1)!]^2}{(2n-1)!}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\cdot sen^{2k}(x)\right)\right]$$

Retornando à forma integral, obtemos:

$$\int sen^{2n-1}(x)dx=-\cos(x)\cdot\frac{2^{2n-2}[(n-1)!]^2}{(2n-1)!}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\cdot sen^{2k}(x)\right)\right]+C$$

■

3.2. Determinação da Fórmula do Cosseno

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 13/10/2026 - **Accepted:** 10/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/a71q1j90
Pages: 1-34

De forma análoga ao procedimento adotado para a função seno, iniciamos a análise considerando então que a sequência $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n)$ se tornará $(a_n) = \left(\int cos(x)\,dx\,, \int \cos^2(x)\,dx\,, \int \cos^3(x)\,dx\,, \dots, \int \cos^{n-1}(x)\,dx\,, \int \cos^n(x)\,dx\right)$. Em seguida, consideremos a fórmula de redução apresentada por Flemming e Gonçalves (2006), que estabelece uma relação de recorrência para integrais de potências do cosseno:

$$\int \cos^n(x)\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1}(x)\,\mathrm{sen}(x) + \frac{n-1}{n}\int cos^{n-2}(x)dx$$

Para utilizar a abordagem de recorrências lineares, definimos:

$$a_n = \int cos^n(x)dx \text{ e } a_{n-2} = \int cos^{n-2}(x)dx$$

Substituindo na relação original, obtemos:

$$a_n = \frac{n-1}{n}a_{n-2} + \frac{\mathrm{sen}(x)cos^{n-1}(x)}{n}$$

Como observado anteriormente no caso do seno, a tentativa de obter uma única fórmula geral diretamente conduz a dificuldades por esse método. Dessa forma, torna-se necessário decompor a sequência em duas subsequências, uma de índices pares e outra de índices ímpares, permitindo um tratamento mais adequado da recorrência.

3.2.1. Subsequência Par

Para a subsequência par, utilizaremos $b_n = a_{2n}$, onde $n \geq 1$. Logo, a sequência será:

$$(b_n) = (a_{2n}) =$$

$$\left(\int \cos^2(x)\,dx\,, \int \cos^4(x)\,dx\,, \int \cos^6(x)\,dx\,, \dots, \int \cos^{2n-2}(x)\,dx\,, \int \cos^{2n}(x)\,dx\right)$$

O primeiro termo da sequência é

$$b_1 = \int \cos^2(x)\,dx = \frac{x}{2} + \frac{sen(x)\cos(x)}{2}.$$

Aplicando a fórmula de redução para expoentes pares, obtemos:

$$b_n = \int \cos^{2n}(x)\,dx = \frac{1}{2n}\cos^{2n-1}(x)\,\mathrm{sen}(x) + \frac{2n-1}{2n}\int cos^{2n-2}(x)dx$$

E, portanto,

$$b_{n-1} = \int cos^{2n-2}(x)dx$$

Logo, a recorrência pode ser escrita como:

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 13/10/2026 - **Accepted:** 10/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/a71q1j90
Pages: 1-34

$$b_n = \frac{2n-1}{2n} b_{n-1} + \frac{\cos^{2n-1}(x)\, sen(x)}{2n}$$

Observa-se que essa recorrência possui a mesma estrutura da obtida para a subsequência par do seno, diferenciando-se pelo sinal do termo não homogêneo, pela substituição de seno por cosseno e pelo termo inicial. Portanto, aplicando o mesmo procedimento algébrico desenvolvido anteriormente, obtém-se:

$$\int \cos^{2n}(x)\, dx = \frac{(2n-1)!}{2^{2n-2}(n-1)!(n!)} \left[\frac{x}{2} + \operatorname{sen}(x) \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{2^{2k-1}(k!)^2}{(2k+1)!} \cdot \cos^{2k+1}(x) \right) \right] + C$$

■

3.2.2. Subsequência Ímpar

Para a subsequência ímpar, utilizaremos $c_n = a_{2n-1}$, onde $n \geq 1$. Logo, a sequência será:

$$(c_n) = (a_{2n-1}) =$$

$$\left(\int cos(x)\, dx\, , \int \cos^3(x)\, dx\, , \int \cos^5(x)\, dx\, , \ldots , \int \cos^{2n-3}(x)\, dx\, , \int \cos^{2n-1}(x)\, dx \right)$$

O primeiro termo da sequência é dado por

$$c_1 = \int cos(x) dx = sen(x).$$

Tomando a fórmula de redução para potências ímpares do cosseno, temos:

$$c_n = \int \cos^{2n-1}(x)\, dx = \frac{1}{2n-1} \cos^{(2n-1)-1}(x) \operatorname{sen}(x) + \frac{(2n-1)-1}{2n-1} \int cos^{(2n-1)-2}(x)\, dx$$

E, portanto,

$$c_{n-1} = \int cos^{(2n-1)-2}(x) dx$$

Logo, obtemos a relação de recorrência:

$$c_n = \frac{2n-2}{2n-1} c_{n-1} + \frac{\cos^{2n-2}(x) \operatorname{sen}(x)}{2n-1}$$

Essa relação possui a mesma estrutura da recorrência obtida para as potências ímpares da função seno, diferenciando-se pela troca entre as funções trigonométricas, pelo sinal do termo não homogêneo e pelo termo inicial. Dessa forma, aplicando o mesmo procedimento algébrico utilizado anteriormente, obtém-se a expressão fechada da subsequência:

$$\int \cos^{2n-1}(x)\, dx = \frac{2^{2n-2}[(n-1)!]^2}{(2n-1)!} \cdot sen(x) \left[\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \cdot \cos^{2k}(x) \right) \right] + C$$

■

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 13/10/2026 - **Accepted:** 10/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/a71q1j90
Pages: 1-34

3.3. Determinação da Fórmula da Tangente

Para a determinação da fórmula fechada associada à função tangente, de forma análoga, iniciamos a análise considerando então que a sequência $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n)$ se tornará $(a_n) = \left(\int tan(x)dx\,, \int \tan^2(x)\,dx\,, \int \tan^3(x)\,dx\,, \dots, \int \tan^{n-1}(x)\,dx, \int \tan^n(x)dx\right)$. Logo após, partimos da fórmula apresentada por Flemming e Gonçalves (2006):

$$\int \tan^n(x)\,dx = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1}(x) - \int \tan^{n-2}(x)dx$$

Para formalizar essa recorrência, definimos:

$$a_n = \int tan^n(x)dx \text{ e } a_{n-2} = \int tan^{n-2}(x)dx$$

Logo, obtemos:

$$a_n = -a_{n-2} + \frac{tan^{n-1}(x)}{n-1}$$

Como observado nos casos anteriores, dividiremos o estudo em subsequências pares e ímpares, de modo a facilitar a análise da recorrência.

3.3.1. Subsequência Par

Para a subsequência par, utilizaremos $b_n = a_{2n}$, onde $n \geq 1$. Logo, a sequência será:

$$(b_n) = (a_{2n}) =$$

$$\left(\int \tan^2(x)\,dx\,, \int \tan^4(x)\,dx\,, \int \tan^6(x)\,dx\,, \dots, \int \tan^{2n-2}(x)\,dx\,, \int \tan^{2n}(x)dx\right)$$

O primeiro termo da sequência é

$$b_1 = \int \tan^2(x)\,dx = \tan(x) - x.$$

Utilizando a relação de recorrência, obtemos:

$$b_n = \int \tan^{2n}(x)\,dx = \frac{1}{2n-1}\tan^{2n-1}(x) - \int \tan^{2n-2}(x)dx$$

E, portanto,

$$b_{n-1} = \int tan^{2n-2}(x)dx$$

Logo, a recorrência pode ser escrita como:

$$b_n = -b_{n-1} + \frac{\tan^{2n-1}(x)}{2n-1}$$

Embora essa recorrência também seja linear de primeira ordem não homogênea, ela apresenta coeficiente constante $p(n) = -1$. Em razão dessa característica, sua

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 13/10/2026 - **Accepted:** 10/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/a71q1j90
Pages: 1-34

resolução pode ser obtida diretamente por expansão sucessiva. Com $n = m + 1$, $b_{m+1} = -b_m + \frac{\tan^{2m+1}(x)}{2m+1}$, e expandindo obtém-se o padrão $b_{m+1} = (-1)^m b_1 + \left[\sum_{k=1}^{m}(-1)^{m-k}\frac{\tan^{2k+1}(x)}{2k+1}\right]$. Com $m = n - 1$ e $b_1 = \tan(x) - x$, o termo $(-1)^{n-1}\tan(x)$ é o termo $k = 0$ do somatório, e $(-1)^{n-1}(-x) = (-1)^n x$. Logo,

$$\int \tan^{2n}(x)\,dx = (-1)^n x + \left[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k-1}\frac{\tan^{2k+1}(x)}{2k+1}\right] + C$$

■

3.3.2. Subsequência Ímpar

Para a subsequência ímpar, utilizaremos $c_n = a_{2n-1}$, onde $n \geq 1$. Logo, a sequência será:

$$(c_n) = (a_{2n-1}) =$$

$$\left(\int tan(x)\,dx\,, \int \tan^3(x)\,dx\,, \int \tan^5(x)\,dx\,, \ldots, \int \tan^{2n-3}(x)\,dx\,, \int \tan^{2n-1}(x)dx\right)$$

O primeiro termo da sequência é

$$c_1 = \int tan(x)\,dx = -\ln|cos(x)|.$$

A partir da fórmula de recorrência conhecida para a tangente, tomamos:

$$c_n = \int \tan^{2n-1}(x)\,dx = \frac{1}{(2n-1)-1}\tan^{(2n-1)-1}(x) - \int \tan^{(2n-1)-2}(x)dx$$

Observando que

$$c_{n-1} = \int \tan^{(2n-1)-2}(x)dx$$

Logo, obtemos a seguinte relação de recorrência:

$$c_n = -c_{n-1} + \frac{\tan^{2n-2}(x)}{2n-2}$$

Novamente, essa recorrência possui coeficiente constante $p(n) = -1$, o que permite determinar sua solução por expansão sucessiva. Com $n = m + 1$, $c_{m+1} = -c_m + \frac{\tan^{2m}(x)}{2m}$, e a expansão fornece o padrão $c_{m+1} = (-1)^m c_1 + \left[\sum_{k=1}^{m}(-1)^{m-k}\frac{\tan^{2k}(x)}{2k}\right]$. Com $m = n - 1$ e $c_1 = -\ln|\cos(x)|$, chega-se a:

$$\int \tan^{2n-1}(x)\,dx = (-1)^n \ln|\cos(x)| + \left[\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{n-k-1}\frac{\tan^{2k}(x)}{2k}\right] + C$$

■

4. Verificações

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 13/10/2026 - **Accepted:** 10/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/a71q1j90
Pages: 1-34

Nesta seção, as fórmulas obtidas serão verificadas por meio de casos particulares, indução finita e derivação direta, de modo a examinar sua consistência algébrica e confirmar sua validade.

4.1. Por Caso Particular

Como ilustração, as seis fórmulas serão avaliadas para valores específicos de n, desenvolvendo as somas finitas. Esses exemplos mostram como os coeficientes e os termos trigonométricos se organizam em cada caso; a validade geral é demonstrada nas Seções 4.2 e 4.3.

4.1.1. Seno Par

Para verificar a consistência da fórmula obtida, tomemos o seguinte exemplo particular:

Caso $n = 6$:

$$\int sen^{2\cdot 6}(x)dx = \frac{(2\cdot 6-1)!}{2^{2\cdot 6-2}(6-1)!(6!)}\left[\frac{x}{2} - \cos(x)\sum_{k=0}^{6-1}\left(\frac{2^{2k-1}(k!)^2}{(2k+1)!}\cdot sen^{2k+1}(x)\right)\right] + C$$

Calculando, obtemos:

$$\int sen^{12}(x)dx = \frac{231x}{1024} - \cos(x)\left(\frac{231sen(x)}{1024} + \frac{77sen^3(x)}{512} + \frac{77sen^5(x)}{640} + \frac{33sen^7(x)}{320} + \frac{11sen^9(x)}{120} + \frac{sen^{11}(x)}{12}\right) + C$$

Os coeficientes obtidos coincidem com os da aplicação sucessiva da fórmula de redução Eq.(3).

4.1.2. Seno Ímpar

Para verificar a consistência da fórmula obtida, tomaremos o exemplo particular caso $n = 4$:

$$\int sen^{2\cdot 4-1}(x)dx = -\cos(x)\cdot\frac{2^{2\cdot 4-2}[(4-1)!]^2}{(2\cdot 4-1)!}\left[\sum_{k=0}^{4-1}\left(\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\cdot sen^{2k}(x)\right)\right] + C$$

Onde obtemos:

$$\int sen^7(x)dx = -\frac{16\cos(x)}{35} - \frac{8\cos(x)sen^2(x)}{35} - \frac{6\cos(x)sen^4(x)}{35} - \frac{\cos(x)sen^6(x)}{7} + C$$

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 13/10/2026 - **Accepted:** 10/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/a71q1j90
Pages: 1-34

O resultado obtido está em conformidade com a estrutura esperada coincidindo com a fórmula de redução correspondente.

4.1.3. Cosseno Par

Para verificar a consistência da fórmula obtida, tomaremos como exemplo particular o caso $n = 5$:

$$\int \cos^{2\cdot5}(x)\,dx = \frac{(2\cdot5-1)!}{2^{2\cdot5-2}(5-1)!(5!)}\left[\frac{x}{2} + \operatorname{sen}(x)\sum_{k=0}^{5-1}\left(\frac{2^{2k-1}(k!)^2}{(2k+1)!}\cdot\cos^{2k+1}(x)\right)\right] + C$$

Onde obtemos:

$$\int \cos^{10}(x)\,dx = \frac{63x}{256} + sen(x)\left(\frac{63cos(x)}{256} + \frac{21\cos^3(x)}{128} + \frac{21\cos^5(x)}{160} + \frac{9\cos^7(x)}{80} + \frac{\cos^9(x)}{10}\right) + C$$

O resultado obtido apresenta a estrutura esperada que coincide com os da aplicação sucessiva da fórmula de redução correspondente.

4.1.4. Cosseno Ímpar

Para verificar a consistência da fórmula obtida, tomaremos como exemplo o caso $n = 4$:

$$\int \cos^{2\cdot4-1}(x)\,dx = \frac{2^{2\cdot4-2}[(4-1)!]^2}{(2\cdot4-1)!}\cdot sen(x)\left[\sum_{k=0}^{4-1}\left(\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\cdot\cos^{2\mathrm{k}}(x)\right)\right] + C$$

Calculando, teremos:

$$\int \cos^7(x)\,dx = \frac{16sen(x)}{35} + \frac{8sen(x)\cos^2(x)}{35} + \frac{6sen(x)\cos^4(x)}{35} + \frac{sen(x)\cos^6(x)}{7} + C$$

O resultado obtido apresenta a estrutura que coincide com a fórmula de redução correspondente.

4.1.5. Tangente Par

Para verificar a consistência, consideremos o exemplo quando $n = 4$:

$$\int \tan^{2\cdot4}(x)\,dx = (-1)^4x + \left[\sum_{k=0}^{4-1}(-1)^{4-k-1}\frac{\tan^{2k+1}(x)}{2k+1}\right] + C$$

Expandindo, teremos:

$$\int \tan^8(x)\,dx = x - \tan(x) + \frac{\tan^3(x)}{3} - \frac{\tan^5(x)}{5} + \frac{\tan^7(x)}{7} + C$$

O resultado apresenta o padrão esperado: uma combinação de termos polinomiais em $\tan(x)$ com sinais alternados, além do termo linear em x. E coincide com a

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 13/10/2026 - **Accepted:** 10/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/a71q1j90
Pages: 1-34

fórmula de redução correspondente.

4.1.6. Tangente Ímpar

Para verificar a consistência da fórmula, tomemos como exemplo o caso $n = 5$:

$$\int \tan^{2\cdot 5-1}(x)\,dx = (-1)^5 \ln|\cos(x)| + \left[\sum_{k=1}^{5-1}(-1)^{5-k-1}\frac{\tan^{2k}(x)}{2k}\right] + C$$

Logo:

$$\int \tan^{9}(x)\,dx = -\ln|\cos(x)| - \frac{\tan^{2}(x)}{2} + \frac{\tan^{4}(x)}{4} - \frac{\tan^{6}(x)}{6} + \frac{\tan^{8}(x)}{8} + C$$

O resultado apresenta uma estrutura organizada, composta por um termo logarítmico e uma soma de potências de $\tan(x)$ com sinais alternados, o que coincide com a fórmula de redução correspondente.

4.2. Por Indução Finita

A verificação por casos particulares permite observar o comportamento das fórmulas para determinados valores do índice, mas não garante sua validade para todos os números naturais considerados. Assim, nesta subseção, será utilizado o princípio da indução finita para demonstrar que as expressões fechadas obtidas são válidas para todo $n \geq 1$.

O procedimento consiste em estabelecer inicialmente a validade da fórmula para o primeiro índice admissível, denominado caso base. Em seguida, admite-se que a expressão seja válida para um índice arbitrário n, chamado hipótese de indução, e utiliza-se a relação de recorrência correspondente para demonstrar que ela também é válida para $n + 1$.

Para simplificar as demonstrações, serão introduzidas constantes auxiliares que representam os coeficientes fatoriais presentes nas fórmulas fechadas. Essas constantes permitem estabelecer identidades algébricas utilizadas na passagem do índice n para $n + 1$.

Definimos, portanto,

$$\alpha_n = \frac{(2n-1)!}{2^{2n-2}(n-1)!(n!)}, \quad \beta_k = \frac{2^{2k-1}(k!)^2}{(2k+1)!}, \quad \gamma_n = \frac{2^{2n-2}[(n-1)!]^2}{(2n-1)!}, \quad \delta_k = \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}$$

A partir dessas definições, utilizaremos as seguintes identidades:

$$\alpha_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}\alpha_n \tag{18}$$

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 13/10/2026 - **Accepted:** 10/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/a71q1j90
Pages: 1-34

$$\alpha_{n+1}\beta_n = \frac{1}{2n+2} \tag{19}$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{2n}{2n+1}\gamma_n \tag{20}$$

$$\gamma_{n+1}\delta_n = \frac{1}{2n+1} \tag{21}$$

Essas relações decorrem diretamente das propriedades dos fatoriais e serão fundamentais para simplificar os termos que aparecem nas demonstrações.

4.2.1. Seno Par

Para verificação da veracidade da fórmula, vamos provar por indução. Para facilitar, vamos definir:

$$b_n = \int sen^{2n}(x)dx = -\frac{sen^{2n-1}(x)\cos(x)}{2n} + \frac{2n-1}{2n}\int sen^{2n-2}(x)dx$$

$$b_{n+1} = \int sen^{2n+2}(x)dx = -\frac{sen^{2n+1}(x)\cos(x)}{2n+2} + \frac{2n+1}{2n+2}\int sen^{2n}(x)dx$$

Base $(n = 1)$: $\alpha_1 = 1$ e $\beta_0 = \frac{1}{2}$, então

$$\int sen^2(x)dx = b_1 = \frac{x}{2} - \frac{sen(x)\cos(x)}{2}$$

Suponha válido para n. Pela recorrência,

$$b_{n+1} = -\frac{sen^{2n+1}(x)\cos(x)}{2n+2} + \frac{2n+1}{2n+2}\cdot\alpha_n\left[\frac{x}{2} - \cos(x)\sum_{k=0}^{n-1}\left(\beta_k \cdot sen^{2k+1}(x)\right)\right]$$

Usando (18) nos termos com $\frac{x}{2}$ e com o somatório, e (19) no último termo:

$$b_{n+1} = \alpha_{n+1}\left[\frac{x}{2} - \cos(x)\sum_{k=0}^{n}\beta_k \cdot sen^{2k+1}(x)\right]$$

■

4.2.2. Seno Ímpar

Para verificação da veracidade da fórmula, vamos provar por indução. Para facilitar, vamos definir:

$$c_n = \int sen^{2n-1}(x)dx = \frac{-sen^{2n-2}(x)\cos(x)}{2n-1} + \frac{2n-2}{2n-1}\int sen^{2n-3}(x)dx$$

$$c_{n+1} = \int sen^{2n+1}(x)dx = \frac{-sen^{2n}(x)\cos(x)}{2n+1} + \frac{2n}{2n+1}\int sen^{2n-1}(x)dx$$

Base $(n = 1)$: $\gamma_1 = 1$ e $\delta_0 = 1$, então

$$\int sen(x)dx = c_1 = -\cos(x)$$

Suponha válido para n. Pela recorrência,

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 13/10/2026 - **Accepted:** 10/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/a71q1j90
Pages: 1-34

$$c_{n+1} = \frac{-sen^{2n}(x)\cos(x)}{2n+1} - \frac{2n}{2n+1}\cos(x)\cdot\gamma_n\left[\sum_{k=0}^{n-1}\left(\delta_k \cdot sen^{2k}(x)\right)\right]$$

Usando (20) e (21), temos:

$$c_{n+1} = -\cos(x)\,\gamma_{n+1}\left[\sum_{k=0}^{n}\left(\delta_k \cdot sen^{2k}(x)\right)\right]$$

■

4.2.3. Cosseno Par

Para facilitar, vamos definir:

$$b_n = \int \cos^{2n}(x)\,dx = \frac{\cos^{2n-1}(x)\,\mathrm{sen}(x)}{2n} + \frac{2n-1}{2n}\int cos^{2n-2}(x)dx$$

$$b_{n+1} = \int cos^{2n+2}(x)dx = \frac{\cos^{2n+1}(x)\,\mathrm{sen}(x)}{2n+2} + \frac{2n+1}{2n+2}\int cos^{2n}(x)dx$$

Base $(n = 1)$: $\alpha_1 = 1$ e $\beta_0 = \frac{1}{2}$, então

$$\int cos^2(x)dx = b_1 = \frac{x}{2} + \frac{sen(x)\cos(x)}{2}$$

Suponha válido para n. Pela recorrência,

$$b_{n+1} = \frac{\cos^{2n+1}(x)\,\mathrm{sen}(x)}{2n+2} + \frac{2n+1}{2n+2}\alpha_n\left[\frac{x}{2} + \mathrm{sen}(x)\sum_{k=0}^{n-1}\left(\beta_k \cdot \cos^{2k+1}(x)\right)\right]$$

Usando (18) nos termos com $\frac{x}{2}$ e com o somatório, e (19) no último termo:

$$b_{n+1} = \alpha_{n+1}\left[\frac{x}{2} + \mathrm{sen}(x)\sum_{k=0}^{n}\beta_k \cdot cos^{2k+1}(x)\right]$$

■

4.2.4. Cosseno Ímpar

Para verificação da veracidade da fórmula, vamos provar por indução. Para melhor facilidade, vamos definir:

$$c_n = \int \cos^{2n-1}(x)\,dx = \frac{\cos^{2n-2}(x)\,\mathrm{sen}(x)}{2n-1} + \frac{2n-2}{2n-1}\int cos^{2n-3}(x)\,dx$$

$$c_{n+1} = \int cos^{2n+1}(x)dx = \frac{\cos^{2n}(x)\,\mathrm{sen}(x)}{2n+1} + \frac{2n}{2n+1}\int cos^{2n-1}(x)dx$$

Base $(n = 1)$: $\gamma_1 = 1$ e $\delta_0 = 1$, então

$$\int cos(x)dx = c_1 = \mathrm{sen}(x)$$

Suponha válido para n. Pela recorrência,

$$c_{n+1} = \frac{\cos^{2n}(x)\,\mathrm{sen}(x)}{2n+1} + \frac{2n}{2n+1}\gamma_n \cdot sen(x)\left[\sum_{k=0}^{n-1}\left(\delta_k \cdot \cos^{2\mathrm{k}}(x)\right)\right]$$

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 13/10/2026 - **Accepted:** 10/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/a71q1j90
Pages: 1-34

Usando (20) e (21), temos:

$$c_{n+1} = \text{sen}(x)\,\gamma_{n+1}\left[\sum_{k=0}^{n}\left(\delta_k \cdot cos^{2k}(x)\right)\right]$$

■

4.2.5. Tangente Par

Para verificação da veracidade da fórmula, vamos provar por indução. Para melhor facilidade, vamos definir:

$$b_n = \int \tan^{2n}(x)\,dx = \frac{\tan^{2n-1}(x)}{2n-1} - \int \tan^{2n-2}(x)dx$$

$$b_{n+1} = \int \tan^{2n+2}(x)\,dx = \frac{\tan^{2n+1}(x)}{2n+1} - \int \tan^{2n}(x)dx$$

Base $(n = 1)$:

$$\int tan^2(x)dx = b_1 = \tan(x) - x$$

Suponha válido para n. Pela recorrência,

$$b_{n+1} = \frac{\tan^{2n+1}(x)}{2n+1} - \left(x(-1)^n + \left[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k-1}\frac{\tan^{2k+1}(x)}{2k+1}\right]\right)$$

$$b_{n+1} = x(-1)^{n+1} + \left[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k}\frac{\tan^{2k+1}(x)}{2k+1}\right] + \frac{\tan^{2n+1}(x)}{2n+1}$$

Como $(-1)^{n-k} = (-1)^{(n+1)-k-1}$, o somatório já tem o sinal correto. O último termo é o de $k = n$, cujo sinal é $(-1)^{(n+1)-n-1} = +1$. Logo,

$$b_{n+1} = x(-1)^{n+1} + \left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^{(n+1)-k-1}\frac{\tan^{2k+1}(x)}{2k+1}\right]$$

■

4.2.6. Tangente Ímpar

Para verificação da veracidade da fórmula, vamos provar por indução. Para melhor facilidade, vamos definir:

$$c_n = \int \tan^{2n-1}(x)\,dx = \frac{\tan^{2n-2}(x)}{2n-2} - \int \tan^{2n-3}(x)dx$$

$$c_{n+1} = \int \tan^{2n+1}(x)\,dx = \frac{\tan^{2n}(x)}{2n} - \int \tan^{2n-1}(x)dx$$

Base $(n = 1)$:

$$\int tan(x)dx = c_1 = -\ln|cos(x)|$$

Suponha válido para n. Pela recorrência,

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 13/10/2026 - **Accepted:** 10/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/a71q1j90
Pages: 1-34

$$c_{n+1} = \frac{\tan^{2n}(x)}{2n} - \left((-1)^n \ln|\cos(x)| + \left[\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{n-k-1}\frac{\tan^{2k}(x)}{2k}\right]\right)$$

$$c_{n+1} = (-1)^{n+1}\ln|\cos(x)| + \left[\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{n-k}\frac{\tan^{2k}(x)}{2k}\right] + \frac{\tan^{2n}(x)}{2n}$$

O último termo é o de $k = n$, cujo sinal é $(-1)^{(n+1)-n-1} = +1$. Logo,

$$c_{n+1} = (-1)^{n+1}\ln|\cos(x)| + \left[\sum_{k=1}^{n}(-1)^{(n+1)-k-1}\frac{\tan^{2k}(x)}{2k}\right]$$

■

4.3. Por Derivação

Outra forma de verificar as fórmulas fechadas consiste em calcular suas derivadas e comparar os resultados com os respectivos integrandos. De acordo com a definição de primitiva, uma função F é primitiva de uma função f em determinado intervalo quando satisfaz $F'(x) = f(x)$ nesse intervalo.

Assim, para cada expressão obtida, aplicaremos as regras de derivação, especialmente a regra do produto e as identidades trigonométricas fundamentais. O objetivo é mostrar que os termos resultantes se simplificam de maneira a recuperar exatamente a potência trigonométrica correspondente.

Para organizar os cálculos, serão utilizadas as constantes auxiliares já definidas, juntamente com outras relações algébricas necessárias à simplificação dos somatórios. Dessa forma, a verificação por derivação permite confirmar diretamente que as expressões apresentadas representam primitivas das funções estudadas, em $\mathbb{R}$, para seno e cosseno, e em cada intervalo $\left(-\frac{\pi}{2} + m\pi,\ \frac{\pi}{2} + m\pi\right)$, $m \in \mathbb{Z}$, para a tangente, onde $\tan(x)$ e $\ln|cos(x)|$ estão definidas; nesse caso, a constante C pode diferir de um intervalo para outro.

Para facilitar as demonstrações, definimos também o coeficiente auxiliar:

$$\mu_n = \frac{2^{2n-1}(n!)^2}{(2n)!}$$

A partir das definições anteriores, podemos utilizar as seguintes identidades:

$$\mu_k = (2k+1)\beta_k = \frac{2^{2k-1}(k!)^2}{(2k)!} \tag{22}$$

$$\beta_k + \mu_k = (2k+2)\beta_k = \mu_{k+1}, \text{ com } \mu_0 = \frac{1}{2} \tag{23}$$

$$\alpha_n \mu_n = 1 \tag{24}$$

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 13/10/2026 - **Accepted:** 10/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/a71q1j90
Pages: 1-34

$$2(j+1)\delta_{j+1} = (2j+1)\delta_j \quad (25)$$

$$\gamma_n \delta_{n-1} = \frac{1}{2n-1} \quad (26)$$

Essas identidades são obtidas diretamente das expressões fatoriais dos coeficientes e permitem simplificar os somatórios resultantes da derivação.

4.3.1. Seno Par

$$b_n = \alpha_n \left[\frac{x}{2} - \cos(x)\, S(x)\right],\ S(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\beta_k sen^{2k+1}(x)\right)$$

Pela regra do produto:

$$\frac{b_n'}{\alpha_n} = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k sen^{2k+2}(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k sen^{2k}(x)\cos^2(x)$$

Substituindo $\cos^2(x) = 1 - sen^2(x)$ e (23):

$$\frac{b_n'}{\alpha_n} = \frac{1}{2} - \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k sen^{2k}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \mu_{k+1} sen^{2k+2}(x) = \frac{1}{2} - \mu_0 + \mu_n sen^{2n}(x) =$$

$$\mu_n sen^{2n}(x)$$

Por (24),

$$b_n' = sen^{2n}(x)$$

4.3.2. Seno Ímpar

$$c_n = -\gamma_n \cos(x)\, T(x),\quad T(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\delta_k \cdot sen^{2k}(x)\right)$$

Derivando:

$$\frac{c'_n}{\gamma_n} = \sum_{k=0}^{n-1} \delta_k sen^{2k+1}(x) - \cos^2(x) \sum_{k=1}^{n-1} 2k\delta_k sen^{2k-1}(x)$$

Trocando $\cos^2(x) = 1 - sen^2(x)$ e reindexando o segundo somatório com $j = k - 1$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} 2k\delta_k sen^{2k-1}(x) = \sum_{j=0}^{n-2} 2(j+1)\delta_{j+1} sen^{2j+1}(x)$$

Por (25) os somatórios se cancelam até $n-2$. Sobra $(2n-1)\delta_{n-1} sen^{2n-1}(x)$. Por (26),

$$c'_n = sen^{2n-1}(x)$$

4.3.3. Cosseno Par

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 13/10/2026 - **Accepted:** 10/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/a71q1j90
Pages: 1-34

$$b_n = \alpha_n \left[\frac{x}{2} + \operatorname{sen}(x)\, S(x)\right],\ S(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\beta_k cos^{2k+1}(x)\right)$$

Pela regra do produto:

$$\frac{b_n'}{\alpha_n} = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k cos^{2k+2}(x) - sen^2(x) \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k cos^{2k}(x)$$

Substituindo $\operatorname{sen}^2(x) = 1 - cos^2(x)$,

$$\frac{b_n'}{\alpha_n} = \frac{1}{2} - \mu_0 + \mu_n cos^{2n}(x) = \mu_n cos^{2n}(x)$$

Mas, $\alpha_n \mu_n = 1$. Logo,

$$b_n' = cos^{2n}(x)$$

4.3.4. Cosseno Ímpar

$$c_n = \gamma_n \operatorname{sen}(x)\, T(x), \quad T(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\delta_k cos^{2k}(x)\right)$$

Derivando:

$$\frac{c'_n}{\gamma_n} = \sum_{k=0}^{n-1} \delta_k cos^{2k+1}(x) - \operatorname{sen}^2(x) \sum_{k=1}^{n-1} 2k\delta_k cos^{2k-1}(x)$$

Trocando $\operatorname{sen}^2(x) = 1 - cos^2(x)$ e (25), tudo se cancela exceto $(2n-1)\delta_{n-1} cos^{2n-1}(x)$. Por (26),

$$c'_n = cos^{2n-1}(x)$$

4.3.5. Tangente Par

$$b_n = x(-1)^n + \left[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k-1} \frac{\tan^{2k+1}(x)}{2k+1}\right]$$

Vamos derivar cada termo,

$$\left(\frac{\tan^{2k+1}(x)}{2k+1}\right)' = \tan^{2k}(x)\sec^2(x) = \tan^{2k}(x) + \tan^{2k+2}(x)$$

$$b_n' = (-1)^n + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k-1}\tan^{2k}(x) + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k-1}\tan^{2k+2}(x)$$

Vamos reindexar o segundo somatório com $j = k + 1$:

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}\tan^{2j}(x)$$

- Para $1 \le j \le n-1$, os coeficientes de $\tan^{2j}(x)$ são $(-1)^{n-j-1} + (-1)^{n-j} = 0$.
- O termo $k = 0$ do primeiro somatório vale $(-1)^{n-1}$ e cancela o $(-1)^n$ inicial.

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 13/10/2026 - **Accepted:** 10/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/a71q1j90
Pages: 1-34

- Sobra apenas $j = n$: $(-1)^0 \tan^{2n}(x)$.

Logo,

$$b_n' = \tan^{2n}(x)$$

4.3.6. Tangente Ímpar

$$c_n = \ln|cos(x)|\,(-1)^n + \left[\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{n-k-1}\frac{\tan^{2k}(x)}{2k}\right]$$

Vamos derivar cada termo,

$$(\ln|cos(x)|)' = -\tan(x), \quad \left(\frac{\tan^{2k}(x)}{2k}\right)' = \tan^{2k-1}(x)\sec^2(x) = \tan^{2k-1}(x) + \tan^{2k+1}(x)$$

$$c_n' = (-1)^{n+1}\tan(x) + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{n-k-1}\tan^{2k-1}(x) + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{n-k-1}\tan^{2k+1}(x)$$

Vamos reindexar o segundo somatório com $j = k + 1$:

$$\sum_{j=2}^{n}(-1)^{n-j}\tan^{2j-1}(x)$$

- Para $2 \le j \le n-1$, os coeficientes de $\tan^{2j-1}(x)$ se cancelam.
- O termo $k = 1$ do primeiro somatório (para $n = 1$, $c_1' = -(-\tan(x)) = \tan(x)$ diretamente) vale $(-1)^{n-2}\tan(x) = (-1)^n\tan(x)$ e cancela o $(-1)^{n+1}\tan(x)$ inicial.
- Sobra apenas $j = n$: $\tan^{2n-1}(x)$.

Logo,

$$c_n' = \tan^{2n-1}(x)$$

As verificações realizadas evidenciam a consistência das fórmulas fechadas obtidas. A análise dos casos particulares, as demonstrações por indução finita e a derivação direta permitem validar as expressões desenvolvidas, estabelecendo a base necessária para sua utilização em problemas de aplicação.

5. Aplicações

Nesta seção, são apresentadas aplicações das fórmulas fechadas desenvolvidas, ilustrando como as expressões obtidas fornecem diretamente primitivas que, pelos

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 13/10/2026 - **Accepted:** 10/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/a71q1j90
Pages: 1-34

métodos tradicionais, exigiriam sucessivas reduções de ordem, sem o cálculo das integrais intermediárias.

5.1. Aplicação 1

Iniciamos as aplicações explorando o Caso 2 da fundamentação de Flemming e Gonçalves (2006). Utilizaremos o modelo para o cálculo da área de uma figura plana limitada pelos gráficos de duas funções contínuas, f e g, em um intervalo $[a, b]$, onde $f(x) \geq g(x)$. Quando estas funções são dadas em formas paramétricas:

$$y_1 = f(x) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ y_1 = y_1(t) \end{cases}, t \in [t_0, t_1] \text{ e } y_2 = g(x) \Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_2(t) \\ y_2 = y_2(t) \end{cases}, t \in [t_2, t_3]$$

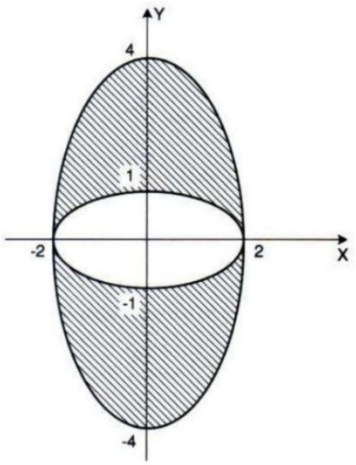
A área A da região delimitada entre as curvas é determinada pela diferença entre as integrais definidas das funções de contorno:

$$A = \int_{t_0}^{t_1} y_1(t) x_1'(t)\, dt - \int_{t_2}^{t_3} y_2(t) x_2'(t)\, dt$$

Tomemos o exemplo 8.3.2 presente no livro:

Calcular a área entre as elipses

$$\begin{cases} x = 2\cos(t) \\ y = 4sen(t) \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x = 2\cos(t) \\ y = sen(t) \end{cases}$$



Fonte: Cálculo A - Flemming e Gonçalves (2006, p. 343-344)

Para resolução, temos:

$$A = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \left[4sen(t) \cdot \left(-2sen(t)\right) - sen(t) \cdot \left(-2sen(t)\right)\right] dt = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} -6sen^2(t)\, dt = 6\pi$$

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 13/10/2026 - **Accepted:** 10/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/a71q1j90
Pages: 1-34

Consideremos agora um exemplo adaptado em que as equações envolvem potências superiores, o que exigiria várias reduções sucessivas:

$$\begin{cases} x = 2\cos(t) \\ y = 4sen^6(t) \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x = 2\cos(t) \\ y = sen^8(t) \end{cases}$$

Para $t \in [0, \pi]$, tem-se $x = 2\cos(t)$ variando de 2 a -2 e $y \geq 0$. Eliminando $t\left(sen^2(t) = 1 - \frac{x^2}{4}\right)$, obtêm-se $y_1 = 4\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^3$ e $y_2 = \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^4$ para $-2 \leq x \leq 2$. Como $0 \leq 1 - \frac{x^2}{4} \leq 1$, vale $4s^3 \geq s^4$ para $s \in [0,1]$, logo $y_1 \geq y_2$ e as curvas só se encontram em $x = \pm 2$. Ambas dependem de x^2, portanto são simétricas em relação ao eixo y e $A = 2\int_0^2 (y_1 - y_2)dx$. Com $x = 2\cos(t)$, $dx = -2sen(t)dt$, e $x: 0 \mapsto 2$ corresponde a $t: \frac{\pi}{2} \mapsto 0$, o que resulta em:

$$A = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\left[4sen^6(t) \cdot \left(-2sen(t)\right) - sen^8(t) \cdot \left(-2sen(t)\right)\right] dt$$

$$A = 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^7(t)\, dt - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^9(t)\, dt \tag{27}$$

Nota-se que a resolução da Eq.(27) pelo método tradicional exigiria sucessivas reduções de ordem, processo que exigiria aplicar a redução três vezes para $sen^7(x)$ e quatro para $sen^9(x)$, enquanto as fórmulas fechadas fornecem as primitivas diretamente.

Para $\int sen^7(t)\, dt$, utilizaremos a fórmula da subsequência ímpar, com $n = 4$:

$$\int sen^{2\cdot 4-1}(t)dt = -\cos(t) \cdot \frac{2^{2\cdot 4-2}[(4-1)!]^2}{(2\cdot 4-1)!}\left[\sum_{k=0}^{4-1}\left(\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \cdot sen^{2k}(t)\right)\right] + C$$

Expandindo o somatório, temos:

$$\int sen^7(t)\, dt = -\frac{16\cos(t)}{35}\left(1 + \frac{sen^2(t)}{2} + \frac{3sen^4(t)}{8} + \frac{5sen^6(t)}{16}\right) + C$$

Aplicando os limites de integração, temos:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^7(t)\, dt = \frac{16}{35} \tag{28}$$

De forma análoga, vamos calcular agora $\int sen^9(t)\, dt$. Para isso, utilizaremos a fórmula da subsequência ímpar, com $n = 5$:

$$\int sen^{2\cdot 5-1}(t)\, dt = -\cos(t) \cdot \frac{2^{2\cdot 5-2}[(5-1)!]^2}{(2\cdot 5-1)!}\left[\sum_{k=0}^{5-1}\left(\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \cdot sen^{2k}(t)\right)\right] + C$$

Resolvendo o quociente e expandindo o somatório, temos:

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 13/10/2026 - **Accepted:** 10/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/a71q1j90
Pages: 1-34

$$\int sen^9(t)\,dt = -\frac{128\cos(t)}{315}\left[1+\frac{sen^2(t)}{2}+\frac{3sen^4(t)}{8}+\frac{5sen^6(t)}{16}+\frac{35sen^8(t)}{128}\right]+C$$

Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo no intervalo determinado, temos:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^9(t)\,dt = \frac{128}{315} \quad (29)$$

Substituindo os valores obtidos nas Eq.(28) e Eq.(29) na equação fundamental (27), chegamos à seguinte solução analítica para a área da região delimitada:

$$A = 16\left(\frac{16}{35}\right) - 4\left(\frac{128}{315}\right) = \frac{256}{45} \cong 5{,}69$$

Nesta aplicação, as fórmulas fechadas forneceram diretamente as primitivas de $sen^7(x)$ e $sen^9(x)$, sem as integrais intermediárias. As expressões ainda envolvem somatório e coeficientes fatoriais, de modo que o ganho está no acesso direto à primitiva, não em uma redução comprovada de erros.

5.2. Aplicação 2

Para a próxima aplicação, calcularemos o volume de um sólido de revolução ainda presente no trabalho de Flemming e Gonçalves (2006), seção 8.5. O volume do sólido é calculado por:

$$V = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx$$

O item (iii), da página 351, apresenta um exemplo de como calcular o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x, da região sob o gráfico de $y = sen(x)$, para $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

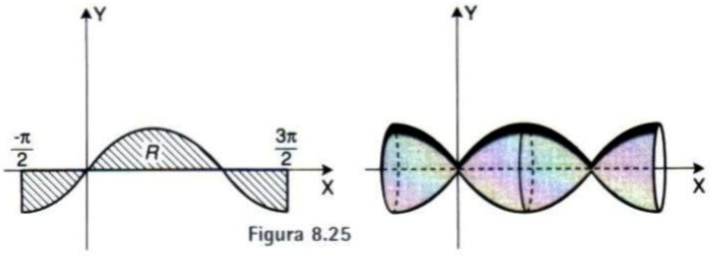


Figura 8.25

Fonte: Cálculo A - Flemming e Gonçalves (2006, p. 351-352)

Aplicando a fórmula do volume do sólido, temos:

$$V = \pi\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} [sen(x)]^2\,dx = \pi\left[\frac{x}{2}-\frac{sen(x)\cos(x)}{2}\right]\Big|_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \pi^2$$

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 13/10/2026 - **Accepted:** 10/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/a71q1j90
Pages: 1-34

Consideremos agora um exemplo adaptado em que a equação envolve uma potência superior de $\cos(x)$ dada pela rotação, em torno do eixo x, da região sob $y = \cos^4(x)$, para $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Substituindo na fórmula do volume, temos:

$$V = \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^8(x)\, dx$$

De forma análoga à aplicação anterior, para obter a primitiva sem as reduções intermediárias vamos aplicar a fórmula fechada para $\cos(x)$ par com $n = 4$:

$$\int \cos^{2\cdot 4}(x)\, dx = \frac{(2\cdot 4-1)!}{2^{2\cdot 4-2}(4-1)!(4!)}\left[\frac{x}{2} + \operatorname{sen}(x) \sum_{k=0}^{4-1}\left(\frac{2^{2k-1}(k!)^2}{(2k+1)!} \cdot \cos^{2k+1}(x)\right)\right] + C$$

Resolvendo o quociente e expandindo o somatório, temos:

$$\int \cos^8(x)\, dx = \frac{35}{64}\left[\frac{x}{2} + \operatorname{sen}(x)\left(\frac{cos(x)}{2} + \frac{\cos^3(x)}{3} + \frac{4\cos^5(x)}{15} + \frac{8\cos^7(x)}{35}\right)\right] + C$$

Em $x = -\frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$ tem-se $\cos(x) = 0$, de modo que todos os termos com $sen(x)\cos^j(x)$ se anulam. Resta:

$$V = \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^8(x)\, dx = \pi \cdot \frac{35}{64} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{35\pi^2}{64} \cong 5{,}40$$

Assim como observado no cálculo de áreas, a aplicação da fórmula fechada para a potência oitava do cosseno eliminou a necessidade de quatro reduções sucessivas de ordem, permitindo uma transição direta da integral para sua forma primitiva expandida.

5.3. Aplicação 3

Para a próxima aplicação, calcularemos o trabalho (W) conforme definido por Leithold (1994). O trabalho realizado por uma força variável $f(x)$ ao mover um objeto de a até b é o limite da soma de Riemann:

$$W = \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\delta_i)\, \Delta_i x = \int_a^b f(x)\, dx$$

Vamos começar tomando o Exemplo 1 da Seção 6.6:

Exemplo 1: Uma partícula se move ao longo do eixo x sob a ação de uma força de $f(x)N$, quando a partícula está a $x\ m$ da origem. Se $f(x) = x^2 + 4$, ache o trabalho

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 13/10/2026 - **Accepted:** 10/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/a71q1j90
Pages: 1-34

realizado quando a partícula se move do ponto onde $x = 2$ ao ponto onde $x = 4$, então:

$$W = \int_2^4 (x^2 + 4)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} + 4x\right] |\, {}_2^4 = \frac{80}{3} Nm$$

Vamos adaptar o problema com força $f(x) = \tan^{11}(x)\, N$ (argumento em radianos), quando a partícula está movendo-se do ponto $x = 0$ até o ponto $x = \frac{\pi}{4}$.

Resolução:

$$W = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{11}(x)\, dx$$

Para otimizar o processo, aplicaremos a fórmula fechada para potências ímpares da tangente, onde $2n - 1 = 11$ (portanto, $n = 6$):

$$\int \tan^{2\cdot 6-1}(x)\, dx = (-1)^6 \ln|\cos(x)| + \left[\sum_{k=1}^{6-1} (-1)^{6-k-1} \frac{\tan^{2k}(x)}{2k}\right] + C$$

Resolvendo, ao expandir o somatório, temos:

$$\int \tan^{11}(x)\, dx = \ln|\cos(x)| + \frac{\tan^2(x)}{2} - \frac{\tan^4(x)}{4} + \frac{\tan^6(x)}{6} - \frac{\tan^8(x)}{8} + \frac{\tan^{10}(x)}{10} + C$$

A função $tan^{11}(x)$ é contínua em $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, onde $\cos(x) > 0$ e $ln|\cos(x)| = \ln\cos(x)$; logo o TFC se aplica. Aplicando-o no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, temos:

$$W = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{11}(x)\, dx = \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{47}{120} \cong 0{,}045J\ (1Nm = 1J)$$

A utilização da fórmula fechada para a potência da tangente mostrou-se uma alternativa sistemática para determinar a primitiva, dispensando cinco reduções sucessivas $(tan^{11} \mapsto tan^9 \mapsto \cdots \mapsto tan)$permitindo obter o trabalho de forma analítica.

Os resultados das três aplicações ilustrativas são consistentes com as expressões deduzidas. O procedimento dispensa o cálculo sucessivo das integrais de ordem inferior; a validade geral das fórmulas decorre das demonstrações da Seção 4; e as aplicações têm caráter ilustrativo.

6. Conclusão

O desenvolvimento deste trabalho permitiu determinar fórmulas fechadas para integrais trigonométricas envolvendo potências de seno, cosseno e tangente, a partir da formulação e resolução de recorrências lineares de primeira ordem. O trabalho

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 13/10/2026 - **Accepted:** 10/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/a71q1j90
Pages: 1-34

apresentou uma sistematização, via recorrências lineares de primeira ordem, de expressões explícitas para integrais de potências de seno, cosseno e tangente, organizadas por paridade e demonstradas por indução e derivação. A abordagem estabelece uma relação entre o processo de integração e o estudo de sequências da Matemática Discreta.

A utilização da fórmula de recorrência apresentada na literatura por Flemming e Gonçalves (2006) permitiu observar que as sequências de iterações associadas às integrais trigonométricas apresentam diferentes termos iniciais, dependendo da paridade do expoente da função a ser integrada. A partir dessa constatação, concluiu-se que, por este método, a dependência dos termos iniciais em relação à paridade dos expoentes dificulta a obtenção de uma única fórmula fechada para a recorrência. Como resultado, foram estabelecidas duas fórmulas fechadas distintas por função, correspondentes às subsequências de expoentes pares e ímpares.

As soluções das recorrências foram aplicadas a diferentes integrais trigonométricas, com expoentes pares e ímpares, ilustrando o uso das fórmulas fechadas obtidas. Embora desenvolvidas para integrais indefinidas, as formulações também se mostraram aplicáveis a integrais definidas desde que o intervalo de integração esteja contido no domínio de validade da primitiva.

Por fim, os resultados reforçam a relevância da Teoria das Recorrências como instrumento para o desenvolvimento de sistematização de resultados, como de integrais trigonométricas, ampliando suas possibilidades de utilização para além dos contextos tradicionalmente associados à Matemática Discreta. A abordagem apresentada também abre perspectivas para a continuidade da investigação, especialmente na determinação de fórmulas fechadas para integrais de potências de secante, cossecante e cotangente, ampliando as relações entre recorrências e integrais trigonométricas.

Tabela 2 – Fórmulas gerais obtidas via recorrência linear

FUNÇÃO	POTÊNCIA	FÓRMULA GERAL OBTIDA
Seno Par	$2n\ (n \geq 1)$	$\frac{(2n-1)!}{2^{2n-2}(n-1)!(n!)}\left[\frac{x}{2} - \cos(x)\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{2^{2k-1}(k!)^2}{(2k+1)!}\cdot sen^{2k+1}(x)\right)\right] + C$

CC BY

REMUNOM
ISSN 2178-6925

Received: 13/10/2026 - **Accepted:** 10/11/2026
Vol: 13.23
DOI: 10.66104/a71q1j90
Pages: 1-34

Seno Ímpar	$2n-1\ (n\geq 1)$	$-\cos(x)\cdot\frac{2^{2n-2}[(n-1)!]^2}{(2n-1)!}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\cdot sen^{2k}(x)\right)\right]+C$
Cosseno Par	$2n\ (n\geq 1)$	$\frac{(2n-1)!}{2^{2n-2}(n-1)!(n!)}\left[\frac{x}{2}+\text{sen}(x)\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{2^{2k-1}(k!)^2}{(2k+1)!}\cdot\cos^{2k+1}(x)\right)\right]+C$
Cosseno Ímpar	$2n-1\ (n\geq 1)$	$\frac{2^{2n-2}[(n-1)!]^2}{(2n-1)!}\cdot sen(x)\left[\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\cdot\cos^{2k}(x)\right)\right]+C$
Tangente Par	$2n\ (n\geq 1)$	$(-1)^n x+\left[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k-1}\frac{\tan^{2k+1}(x)}{2k+1}\right]+C$
Tangente Ímpar	$2n-1\ (n\geq 1)$	$(-1)^n\ln\lvert\cos(x)\rvert+\left[\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{n-k-1}\frac{\tan^{2k}(x)}{2k}\right]+C$

Nota: as fórmulas de seno e cosseno valem em $\mathbb{R}$; as da tangente valem em cada intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}+m\pi,\ \frac{\pi}{2}+m\pi\right), m\in\mathbb{Z}$, e a constante C pode diferir de um intervalo para outro.

Fonte: Elaboração própria

Bibliografia

CASTRO, Fabiano José de. **Matemática discreta: tópicos de recorrências lineares e suas aplicações**. 2016. 77 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2016.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A: funções, limite, derivação e integração**. 6. ed. Vol. 1. Porto Alegre: Bookman, 2006.

LEITHOLD, Louis. **O cálculo com geometria analítica**. Tradução de Cyro de Carvalho Patarra. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994. v. 1

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**. Vol. 2, 5. ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2004.

PEREIRA, M. V. **Recorrências: problemas e aplicações**. Dissertação (mestrado profissional), Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Universidade de Brasília, Brasília, 2014.

ROSEN, Kenneth H. **Discrete Mathematics and Its Applications**. 7. ed. New York: McGraw-Hill, 2012.

CC BY